ЛУЧШИЕ КЛАССИЧЕСКИЕ УЧЕБНИКИ
ФИЗИКА

И. В. САВЕЛЬЕВ

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

в двух томах

ТОМ 1
МЕХАНИКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Издание пятое,
стереотипное



Санкт-Петербург • Москва • Краснодар
2021

ББК 22.3
С 12

Савельев И. В.

С 12 Основы теоретической физики: Учебник. В 2 т. — 5-е изд., стер. Том 1. Механика. Электродинамика. — СПб.: Издательство «Лань», 2021. — 496 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0618-0 (общий)
ISBN 978-5-8114-0619-7 (том 1)

Двухтомный курс «Основы теоретической физики» является введением в теоретическую физику.

Первый том учебника содержит сжатое и ясное изложение основ механики, теории относительности и электродинамики. Строгие и подробные математические выкладки облегчают усвоение материала. Математическое приложение освобождает читателя от необходимости обращаться к руководствам по математике.

Учебник адресован студентам вузов, обучающимся по направлениям подготовки и специальностям, входящим в УГС: «Электроника, радиотехника и системы связи», «Электро- и теплотехника», «Физико-технические науки и технологии», «Машиностроение», «Технологии материалов», «Авиационная и ракетно-космическая техника» и другим инженерно-техническим направлениям подготовки. Может быть полезен преподавателям физики технических вузов.

ББК 22.3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 6

Часть первая. **МЕХАНИКА** 7

Глава I. **Вариационный принцип в механике** 7

§ 1. Введение 7
§ 2. Связи 10
§ 3. Уравнения движения в декартовых координатах . . 13
§ 4. Уравнение Лагранжа в обобщенных координатах . . 17
§ 5. Функция Лагранжа и энергия 24
§ 6. Примеры на составление уравнений Лагранжа . . . 28
§ 7. Принцип наименьшего действия 33

Глава II. **Законы сохранения** 36

§ 8. Сохранение энергии 36
§ 9. Сохранение импульса 37
§ 10. Сохранение момента импульса 39

Глава III. **Некоторые задачи механики** 42

§ 11. Движение частицы в центральном поле сил 42
§ 12. Задача двух тел 48
§ 13. Упругие столкновения частиц 52
§ 14. Рассеяние частиц 57
§ 15. Движение в неинерциальных системах отсчета . . . 62

Глава IV. **Малые колебания** 69

§ 16. Свободные колебания системы без трения 69
§ 17. Затухающие колебания 71
§ 18. Вынужденные колебания 76
§ 19. Колебания системы со многими степенями свободы . . 79
§ 20. Связанные маятники 85

Глава V. **Механика твердого тела** 91

§ 21. Кинематика твердого тела 91
§ 22. Эйлеровы углы 95
§ 23. Тензор инерции 98
§ 24. Момент импульса твердого тела 106
§ 25. Свободные оси вращения 112
§ 26. Уравнение движения твердого тела 114
§ 27. Уравнения Эйлера 118
§ 28. Свободный симметричный волчок 120
§ 29. Симметричный волчок в однородном поле тяжести . . 125

Глава VI. **Канонические уравнения** 130

§ 30. Уравнения Гамильтона 130
§ 31. Скобки Пуассона 134
§ 32. Уравнение Гамильтона — Якоби 136

Глава VII. **Специальная теория относительности** 141

§ 33. Принцип относительности 141
§ 34. Интервал 144
§ 35. Преобразования Лоренца 148
§ 36. Четырехмерные скорость и ускорение 153
§ 37. Релятивистская динамика 155
§ 38. Импульс и энергия частицы 158
§ 39. Действие для релятивистской частицы 161
§ 40. Тензор энергии-импульса 166

Часть вторая. **ЭЛЕКТРОДИНАМИКА** 177

Глава VIII. **Электростатика** 177

§ 41. Электростатическое поле в пустоте 177
§ 42. Уравнение Пуассона 179
§ 43. Разложение поля по мультиполям 182
§ 44. Поле в диэлектриках 188
§ 45. Описание поля в диэлектриках 192
§ 46. Поле в анизотропных диэлектриках 198

Глава IX. **Магнитостатика** 200

§ 47. Стационарное магнитное поле в пустоте 200
§ 48. Уравнение Пуассона для векторного потенциала . . 203
§ 49. Поле соленоида 206
§ 50. Закон Био—Савара 210
§ 51. Магнитный момент 212
§ 52. Поле в магнетиках 220

Глава X. **Нестационарное электромагнитное поле** . . . 226

§ 53. Закон электромагнитной индукции 226
§ 54. Ток смещения 227
§ 55. Уравнения Максвелла 229
§ 56. Потенциалы электромагнитного поля 231
§ 57. Уравнение Даламбера 236
§ 58. Плотность и поток энергии электромагнитного поля . . 237
§ 59. Импульс электромагнитного поля 240

Глава XI. **Уравнения электродинамики в четырехмерной форме** 247

§ 60. Четырехмерный потенциал 247
§ 61. Тензор электромагнитного поля 251
§ 62. Формулы преобразования полей 253
§ 63. Инварианты поля 257
§ 64. Уравнения Максвелла в четырехмерной форме . . . 261
§ 65. Уравнение движения частицы в поле 263

Глава XII. **Вариационный принцип в электродинамике** 266

§ 66. Действие для заряженной частицы в электромагнитном поле 267
§ 67. Действие для электромагнитного поля 269
§ 68. Вывод уравнений Максвелла из принципа наименьшего действия 272
§ 69. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля . . 275
§ 70. Заряженная частица в электромагнитном поле . . . 281

Глава XIII. **Электромагнитные волны** 285

§ 71. Волновое уравнение 285
§ 72. Плоская электромагнитная волна в однородной и изотропной среде 287
§ 73. Монохроматическая плоская волна 293
§ 74. Плоская монохроматическая волна в проводящей среде 300
§ 75. Немонохроматические волны 306

Глава XIV. **Излучение электромагнитных волн** 310

§ 76. Запаздывающие потенциалы 310
§ 77. Поле равномерно движущегося заряда 314
§ 78. Поле заряда, движущегося произвольно 318
§ 79. Поле, создаваемое системой зарядов на больших расстояниях 326
§ 80. Дипольное излучение 332
§ 81. Магнитно-дипольное и квадрупольное излучения . . . 336

Приложения 342

I. Уравнения Лагранжа для голономной системы с идеальными нестационарными связями 342
II. Теорема Эйлера для однородных функций 345
III. Некоторые сведения из вариационного исчисления . . 345
IV. Конические сечения 356
V. Линейные дифференицальные уравнения с постоянными коэффициентами 361
VI. Векторы 365
VII. Матрицы 382
VIII. Определители 391
IX. Квадратичные формы 402
X. Тензоры 412
XI. Некоторые сведения из векторного анализа 430
XII. Четырехмерные векторы и тензоры в псевдоевклидовом пространстве 458
XIII. Дельта-функция Дирака 481
XIV. Ряд и интеграл Фурье 483

Предметный указатель 490

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый вниманию читателей двухтомный курс «Основы теоретической физики» является введением в теоретическую физику.

В соответствии с тем, как принято в теоретической физике, изложение ведется в гауссовой системе единиц. В механике уравнения Лагранжа выводятся не из принципа Даламбера (как это обычно делается), а из уравнений Ньютона. Изложение электродинамики ограничено средами, в которых отсутствует дисперсия, а проницаемости ε и μ не зависят от **E** и **B**.

Более сложными являются § 40 и 69, посвященные рассмотрению тензора энергии-импульса. Они включены в книгу, потому что содержат превосходную иллюстрацию к вопросу о том, каким способом осуществляется обобщение лагранжева формализма на немеханические системы. Читатель, которому эти параграфы покажутся слишком трудными, может пропустить их без ущерба для понимания остальных параграфов книги.

Большое внимание в книге уделено вариационному принципу. При этом последовательно использован следующий прием — сначала требуемый результат получается с помощью методов, знакомых уже читателю, а затем тот же результат получается с помощью вариационного принципа. Тем самым преследовалась цель выработать у читателя отношение к вариационному принципу как к вполне надежному и мощному средству исследования.

Работа над книгой значительно облегчается тем, что она снабжена обстоятельными математическими приложениями. Это избавляет читателя от необходимости обращаться к руководствам по математике и разыскивать в них необходимые сведения.

По сравнению с 1-м изданием текст в основном остался неизменным. Сделана небольшая стилистическая правка и устранены некоторые неточности и замеченные опечатки.

Октябрь 1989 г. *И. Савельев*

Часть первая

МЕХАНИКА

Глава I

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В МЕХАНИКЕ

§ 1. Введение

В зависимости от характера изучаемых объектов механику можно подразделить на механику материальной точки, механику твердого тела [1]) и механику сплошной среды. Последняя в свою очередь подразделяется на гидродинамику, газовую динамику, теорию упругости, теорию пластичности и т. д.

В механике самым сложным для изучения объектом является сплошная (непрерывная) среда, поскольку она представляет собой систему с бесконечно большим числом степеней свободы. Кроме того, при решении ряда задач, рассматриваемых механикой сплошной среды, наряду с методами и уравнениями теоретической механики используются также методы и уравнения термодинамики, электродинамики и т. д. Эти обстоятельства и служат причиной того, что механика сплошной среды является самым сложным разделом механики. В данной книге вопросы механики сплошной среды затрагиваться не будут.

В курсе общей физики задачи механики решаются с помощью уравнений Ньютона. В этой главе мы познакомимся с другим подходом к описанию и изучению движения механических систем. Под механической системой мы будем понимать совокупность материальных точек, движение которых может быть либо свободным, либо ограниченным связями. В частности, совокупность материальных точек, объединенных жесткими связями, образует твердое тело. В дальнейшем мы будем материальные точки для краткости называть частицами.

---

[1]) Имеется в виду абсолютно твердое тело.

В соответствии с упомянутым подходом каждой механической системе сопоставляется некая функция обобщенных координат и обобщенных скоростей системы, а также времени:

$$L = L \text{ (координат, скоростей, времени)},$$

называемая *функцией Лагранжа. Обобщенными координатами* q_k называются любые величины, с помощью которых может быть задано положение системы в пространстве. Обобщенными скоростями $\dot{q}_k$ называются производные обобщенных координат по времени[1]).

Функция Лагранжа может быть использована для характеристики не только систем с конечным числом степеней свободы, но и систем с бесконечным числом степеней свободы — сплошных сред, электромагнитных и других физических полей. Таким образом, значение функции Лагранжа выходит за рамки классической механики.

Установив для рассматриваемой механической системы вид функции Лагранжа, можно описать движение системы с помощью уравнений, связывающих частные производные функции L по координатам и скоростям. Эти уравнения, называемые *уравнениями Лагранжа*, заменяют уравнения Ньютона.

Использование уравнений Лагранжа вместо уравнений Ньютона обладает тем преимуществом, что количество уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы системы, которое при наличии связей, ограничивающих движение системы, будет меньше чем утроенное число частиц, входящих в систему. Количество же уравнений Ньютона, необходимых для описания системы из N частиц, равно $3N$. Кроме того, в уравнения Лагранжа не входят реакции связей[2]), которые заранее неизвестны. Таким образом, при использовании уравнений Лагранжа реакции связей автоматически исключаются из рассмотрения, что существенно упрощает решение соответствующей задачи.

---

[1]) Напомним, что точки над символом величины означают производную по времени: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

[2]) Это справедливо только для идеальных связей, т. е. связей без трения.

Правда, решение дает в этом случае сведения лишь о движении системы, значения реакций остаются неустановленными. Но в большинстве физических задач значения реакций не представляют интереса, так что данных, получаемых методом уравнений Лагранжа, оказывается вполне достаточно.

В качестве примера можно указать на задачу о колебаниях математического маятника (рис. 1.1). Уравнение второго закона Ньютона для частицы m имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R},$$

где $\mathbf{R}$ — реакция нити. Проектируя все векторы на оси x, y и z (ось z направлена за чертеж), мы получим три скалярных уравнения:

$$m\ddot{x} = R_x, \quad m\ddot{y} = mg + R_y, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Рис. 1.1

Если же характеризовать положение системы обобщенной координатой φ, то вместо трех уравнений оказывается достаточным только одно:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi, \tag{1.1}$$

которое и есть уравнение Лагранжа для данного случая[1]. Реакция $\mathbf{R}$ в него не входит. Решив уравнение, мы найдем φ как функцию t. Вида функции L для рассматриваемой системы мы пока касаться не будем (см. пример 1 в § 6).

Итак, движение механической системы может быть описано либо с помощью уравнений Ньютона, либо с помощью уравнений Лагранжа. Естественно, что к уравнениям Лагранжа можно прийти, исходя из уравнений Ньютона (что и будет сделано в § 4 этой главы). Однако весьма существенным является то обстоятельство, что уравнения Лагранжа можно получить с помощью весьма общего вариационного принципа — *принципа наименьшего действия*. Этот принцип может быть положен в основу классической

---

[1]) Обобщенная скорость $\dot{\varphi}$ входит в это уравнение в виде $\frac{d}{dt}\dot{\varphi}$.

механики вместо законов Ньютона. Достоинство принципа наименьшего действия состоит в том, что его можно легко распространить на системы, не являющиеся механическими или чисто механическими, например на упругие среды, электромагнитные поля, поля элементарных частиц и т. д.

Резюмируя, можно сказать, что излагаемый в данной главе подход к изучению движения механических систем обладает гораздо большей общностью, чем метод, основанный на законах Ньютона.

§ 2. Связи

Для системы частиц с массами $m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots$ уравнения второго закона Ньютона можно записать следующим образом:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.1}$$

где $m_1 = m_2 = m_3 = m^{(1)}$ — масса 1-й частицы, $m_4 = m_5 = m_6 = m^{(2)}$ — масса 2-й частицы, ..., x_1 — координата x 1-й частицы, x_2 — координата y 1-й частицы, x_3 — координата z 1-й частицы, x_4, x_5, x_6 — декартовы координаты x, y, z 2-й частицы, ..., F_1 — проекция на ось x результирующей силы $\mathbf{F}^{(1)}$, действующей на 1-ю частицу, F_2 — проекция силы $\mathbf{F}^{(1)}$ на ось y, F_3 — проекция той же силы на ось z, F_4, F_5, F_6 — x-, y-, z-компоненты силы $\mathbf{F}^{(2)}$, действующей на 2-ю частицу, и т. д. Число n уравнений, содержащихся в (2.1), равно утроенному числу частиц, входящих в систему.

На положения и скорости частиц системы могут быть наложены ограничения геометрического или кинематического характера. Эти ограничения называются *связями*.

Примерами систем со связями геометрического характера могут служить:

1) частица, которая при своем движении не может покинуть заданную поверхность или заданную кривую. Поверхность или кривая могут быть неподвижными (*стационарная связь*) или перемещаться заданным образом (*нестационарная связь*);

2) две частицы A и B, связанные жестким невесомым стержнем длины l. В этом случае ограничение,

накладываемое связью, может быть записано в виде уравнения

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2; \qquad (2.2)$$

3) две частицы, связанные невесомой нитью длины l. Аналитическое выражение такой связи имеет вид

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 \leqslant l^2; \qquad (2.3)$$

4) абсолютно твердое тело, которое можно рассматривать как систему частиц с неизменными взаимными расстояниями, т. е. подчиненных связям вида (2.2).

Примером системы со связью как геометрического, так и кинематического характера может служить шар, катящийся без скольжения по шероховатой поверхности. Ограничение кинематического характера заключается в том, что скорость точки касания должна быть равна нулю.

В общем случае связь геометрического характера можно представить уравнением

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0 \qquad (2.4)$$

($n = 3N$, где N — число частиц в системе).

Когда ограничения наложены не только на координаты частиц, но и на их скорости, уравнение связи имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, t) = 0. \qquad (2.5)$$

Если уравнение (2.5) может быть проинтегрировано по времени, оно, очевидно, эквивалентно уравнению вида (2.4).

Связи вида (2.4) и сводящиеся к ним интегрируемые связи вида (2.5) называются *голономными* (или интегрируемыми). Голономными называют также системы с подобными связями. Системы, фигурирующие в рассмотренных выше примерах 1, 2 и 4, относятся к числу голономных.

Итак, в случае голономных связей накладываемые ими ограничения выражаются в виде равенств, связывающих координаты частиц и время (см. уравнение (2.4)).

Неинтегрируемые связи вида (2.5), а также связи, выражаемые в виде неравенств (см. пример 3), называются *неголономными*.

Связи, не изменяющиеся со временем, называются *стационарными* (или склерономными). Связи, изменяющиеся со временем, носят название *нестационарных* (или реономных).

Уравнение голономной стационарной связи имеет вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{2.6}$$

Оно отличается от уравнения (2.4) голономной нестационарной связи тем, что в него не входит явно время t.

Для задач с неголономными связями общих методов решения не существует. Требуется индивидуальный подход к каждой задаче. Неголономных систем мы рассматривать не будем.

Каждая голономная связь, т. е. связь, выражаемая уравнением (2.4) или (2.6), позволяет представить одну из координат как функцию остальных. Следовательно, каждая такая связь уменьшает число независимых координат на единицу.

Напомним, что число независимых величин, необходимых для определения положения системы в пространстве, называется *числом степеней свободы* системы. Поэтому можно сказать, что каждая голономная связь уменьшает число степеней свободы системы на единицу.

Если связи отсутствуют, то система из N частиц обладает числом степеней свободы, равным $n = 3N$. При наличии r связей число степеней свободы будет равно $s = n - r = 3N - r$.

Связи действуют на частицы системы с силами $\mathbf{R}^{(\alpha)}$, которые называются *реакциями*. Связь без трения называется *идеальной*. Суммарная работа, совершаемая реакциями над частицами системы с идеальными стационарными связями, равна нулю. В качестве примера, подтверждающего это утверждение, можно привести систему, изображенную на рис. 1.1. У этой системы реакция $\mathbf{R}$ направлена вдоль нити, а скорость частицы $\mathbf{v}$ перпендикулярна к нити; поэтому сила $\mathbf{R}$ работы над частицей не совершает. Если связь (даже

идеальная) зависит от времени, совершаемая ее реакцией работа, как правило, отлична от нуля.

Выражение для элементарной работы, совершаемой над частицами системы реакциями связей, имеет вид $dA = \sum R_i\,dx_i$. Для системы с идеальными стационарными связями эта работа равна нулю. Следовательно, для таких систем

$$\sum_i R_i\,dx_i = 0, \tag{2.7}$$

где dx_i — проекции на координатные оси перемещений частиц, совместимых со связями, наложенными на частицы[1]).

§ 3. Уравнения движения в декартовых координатах

Рассмотрим систему, состоящую из взаимодействующих друг с другом частиц. Пусть на частицы действуют также внешние силы. Воспользуемся для координат частиц и компонент сил теми же обозначениями, которые мы применяли в предыдущем параграфе (см. первый абзац § 2).

В некоторых случаях силы, действующие на частицы (или хотя бы часть этих сил), могут быть представлены в виде

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{3.1}$$

где

$$U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \tag{3.2}$$

— функция координат частиц и времени, называемая *потенциалом системы*. Если в функцию U не входит явно время t, она представляет собой потенциальную энергию системы.

---

[1]) Во встречающихся в теоретической физике суммах индекс, по которому осуществляется суммирование (немой индекс), как правило, повторяется дважды. В связи с этим принято символ $\sum$ опускать и подразумевать суммирование по дважды повторяющимся индексам. Например, вместо $\sum a_i b_i$ пишут просто $a_i b_i$. Однако, хотя такой способ записи отличается краткостью, мы им пользоваться не будем. Суммирование будут подразумеваться только там, где написан символ $\sum$.

Сила, определяемая формулой (3.1), называется *потенциальной*. Следует различать стационарные и нестационарные потенциальные силы. *Стационарными* называют силы, зависящие только от координат частицы и не зависящие явно от времени. Таким силам отвечает функция U, не содержащая времени явно. Когда t входит в U явно, сила зависит не только от координат, но и от времени и, следовательно, будет *нестационарной*. Стационарные потенциальные силы называют *консервативными*. Системы, в которых действуют только консервативные силы, также называют *консервативными*.

Отметим, что в соответствии с (3.1) силу, действующую на частицу с номером α, можно представить в виде градиента функции (3.2):

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_\alpha U(x_i, t)\,[1]. \tag{3.3}$$

Здесь ∇_α — оператор, компоненты которого равны частным производным по координатам α-й частицы. Формулу (3.3) можно записать также следующим образом:

$$\mathbf{F}_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_\alpha}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{r}_\alpha$ — радиус-вектор частицы[2].

Пусть часть сил, действующих на частицы системы, потенциальна, а часть — непотенциальна. Тогда уравнению (2.1) можно придать вид

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + F_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.5}$$

где F_i^* — компоненты непотенциальных сил, n — утроенное число частиц.

Уравнение (3.5) можно написать в форме, очень удобной для обобщений. С этой целью вводится в рассмотрение упоминавшаяся в § 1 функция Лагранжа, которая для рассматриваемой нами системы частиц

---

[1]) Через x_i в символах функций мы будем обозначать совокупность всех координат: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

[2]) Под производной скаляра φ по вектору $\mathbf{a}$ понимают вектор с компонентами $\partial\varphi/\partial a_x$, $\partial\varphi/\partial a_y$, $\partial\varphi/\partial a_z$. Следовательно, символ $\partial\varphi/\partial\mathbf{r}$ означает вектор с компонентами: $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ (т. е. $\mathrm{grad}\,\varphi$ или $\nabla\varphi$; см. Приложение XI).

определяется следующим образом:

$$L(x_i,\ \dot{x}_i,\ t) = \sum_i \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} - U(x_i,\ t). \qquad (3.6)$$

Продифференцировав по времени частную производную от L по $\dot{x}_i$, получим левую часть уравнения (3.5):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) = m_i \ddot{x}_i.$$

Частная производная от L по x_i дает i-ю компоненту потенциальной силы:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Следовательно, мы приходим к соотношениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^* \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (3.7)$$

которые носят название *уравнений Лагранжа.*

Для систем, в которых действуют только потенциальные силы, уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (3.8)$$

В некоторых случаях уравнения Лагранжа можно представить в форме (3.8) даже тогда, когда силы, действующие на частицы, зависят от скоростей (примером таких сил служит сила Лоренца). Это удается сделать при условии, что такие силы можно получить из некоторой функции $U^*(x_i, \dot{x}_i, t)$ с помощью соотношения

$$F_i = -\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U^*}{\partial \dot{x}_i} \qquad (3.9)$$

(проверку этого утверждения предоставляем читателю).

Функцию $U^*(x_i, \dot{x}_i, t)$ называют *обобщенным потенциалом.* Силы, отвечающие этому потенциалу, мы будем называть обобщенно-потенциальными. При наличии таких сил функция Лагранжа записывается следующим образом:

$$L(x_i,\ \dot{x}_i,\ t) = \sum_i \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} - U(x_i,\ t) - U^*(x_i,\ \dot{x}_i,\ t). \qquad (3.10)$$

К числу сил, зависящих от скоростей частиц, относятся и так называемые *диссипативные* силы. Этим термином обозначают силы, всегда направленные противоположно скоростям частиц и, следовательно, вызывающие их торможение. К числу диссипативных сил относятся, например, силы трения. При наличии диссипативных сил полная механическая энергия системы уменьшается (рассеивается[1]), переходя в другие немеханические формы энергии (например, во внутреннюю энергию тел).

Во многих случаях диссипативные силы $\mathbf{F}^{(d)}$ бывают пропорциональными скоростям частиц, так что их компоненты по координатным осям определяются равенством

$$F_i^{(d)} = -k_i \dot{x}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.11}$$

В этом случае диссипативные силы могут быть выражены через *диссипативную функцию Рэлея*[2]), равную

$$D = \frac{1}{2} \sum_i k_i \dot{x}_i^2. \tag{3.12}$$

Действительно, сопоставив выражения (3.11) и (3.12), легко получить, что

$$F_i^{(d)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}. \tag{3.13}$$

Подставив это выражение в формулу (3.7) вместо F_i^* предполагая, что других непотенциальных сил нет, получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = 0. \tag{3.14}$$

Функция D имеет простой физический смысл. Работа, совершаемая диссипативными силами за время dt, равна

$$dA = \sum_i F_i^{(d)} dx_i = \sum_i F_i^{(d)} \dot{x}_i \, dt = -\sum_i \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i dt = -2D \, dt$$

(мы воспользовались теоремой Эйлера об однородных функциях; см. Приложение II). Эта работа совер-

---

[1]) Слово диссипация (лат.) означает рассеяние.

[2]) Обычно эту функцию обозначают буквой F или R. Однако во избежание путаницы мы предпочли обозначение D.

шается за счет запаса энергии системы. Следовательно, величина $-dA/dt = 2D$ дает скорость рассеяния энергии.

Преимущество уравнений Лагранжа перед уравнениями Ньютона (3.5) заключается в том, что они, как будет показано в следующем параграфе, остаются теми же по форме при переходе от декартовых к любым обобщенным координатам. При переходе же к независимым обобщенным координатам из уравнений выпадают реакции идеальных голономных связей, что сильно облегчает решение задач.

§ 4. Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах

Обобщенными координатами q_k называются любые величины (длины, углы, площади и т. д.), которые определяют положение механической системы в пространстве. В качестве примера можно указать на сферические координаты частицы: r, ϑ, φ. Очевидно, что декартовы координаты представляют собой частный случай обобщенных координат.

Производные по времени от обобщенных координат, т. е. величины $\dot{q}_k$ называются *обобщенными скоростями* системы.

Число независимых обобщенных координат, необходимых для задания положения системы, равно числу ее степеней свободы. В дальнейшем мы всегда будем выбирать обобщенные координаты так, чтобы их число совпадало с числом степеней свободы системы (т. е. чтобы все они были независимы друг от друга).

Отметим, что обобщенные координаты часто бывают полезными и в системах без связей (в этом случае их число совпадает с числом декартовых координат). Так, при решении задачи о движении частицы в центральном поле сил сферические координаты r, ϑ, φ более удобны, чем декартовы координаты x, y, z.

Весьма полезным оказывается следующее представление. Введем в рассмотрение систему координат в воображаемом s-мерном пространстве (его называют *конфигурационным* пространством или q-пространством). По осям этой системы будем откладывать значения координат $q_k(t)$. Тогда для каждого момента времени t положению системы в обычном

пространстве будет соответствовать точка в конфигурационном пространстве. Движению системы в реальном трехмерном пространстве будет соответствовать движение точки в воображаемом s-мерном пространстве.

Докажем, что уравнения (3.7) остаются справедливыми при переходе от декартовых координат x_i к обобщенным координатам q_k, а также что в уравнения Лагранжа, написанные в независимых обобщенных координатах, реакции связей не входят.

Рассмотрим голономную систему с идеальными стационарными связями. Разделим непотенциальные силы, действующие на частицы системы, на две категории: реакции связей R_i и прочие непотенциальные силы F_i^*. Тогда уравнения (3.7) будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = R_i + F_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.1}$$

Пусть на систему наложены r связей, выражаемых условиями

$$f_l(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, r) \tag{4.2}$$

(поскольку связи стационарны, в функции f_l время явно не входит).

Декартовы координаты x_i, определяющие положение частиц системы, могут быть представлены как функции обобщенных координат q_k. Если время t не входит явно в уравнения связей, всегда можно выбрать q_k так, чтобы t не вошло и в функции, выражающие x_i через q_k, т. е. чтобы эти функции имели вид

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.3}$$

(s — число степеней свободы, равное $n - r$). В дальнейшем для сокращения записей выражения типа $x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ мы будем записывать в виде $x_i(q_k)$.

В соответствии с (4.3) производные функций $x_i(q_k)$ по времени имеют вид

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k. \tag{4.4}$$

Суммирование производится по всем q_k, т. е. индекс k пробегает все значения от 1 до s. Выражение (4.4) может быть написано для любого i от 1 до n. В дальнейшем, когда это не сможет привести к недоразумениям, мы не будем указывать значения, пробегаемые индексом, по которому производится суммирование. Этот индекс называется *немым*. Отметим, что в формулах суммирования немой индекс может обозначаться любой буквой — замена одного индекса другим не изменяет суммы. В частности, выражение (4.4) может быть с таким же успехом записано, например, в виде

$$\dot{x}_i = \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l. \tag{4.5}$$

Величины $\partial x_i/\partial q_k$ не содержат обобщенных скоростей $\dot{q}_k$. Поэтому на основании (4.4) можно утверждать, что

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \tag{4.6}$$

Отметим также, что поскольку функции (4.3) не содержат величин $\dot{q}_k$, частные производные от x_i по этим величинам равны нулю:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_k} = 0. \tag{4.7}$$

Наконец, получим еще одно соотношение, которое нам понадобится в дальнейшем. Величины $\partial x_i/\partial q_k$ суть функции только координат q_k (скоростей $\dot{q}_k$ эти величины, как уже отмечалось, не содержат). Поэтому

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_l = \sum_l \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_l\,\partial q_k}\dot{q}_l. \tag{4.8}$$

Теперь продифференцируем выражение (4.5) по q_k. Поскольку производные $\partial \dot{q}_l/\partial q_k$ равны нулю, получим

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \sum_l \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l = \sum_l \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\,\partial q_l}\dot{q}_l.$$

Сопоставив это выражение с (4.8), придем к соотношению

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \tag{4.9}$$

Получив все необходимые соотношения, приступим к доказательству. Умножив обе части каждого из уравнений (4.1) на $\partial x_i/\partial q_k$ и сложив все уравнения вместе, получим

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) \frac{\partial x_i}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \\ = \sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i F_i^* \frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \tag{4.10}$$

Первая из сумм в правой части этого выражения равна нулю. Чтобы доказать это, умножим ее на dq_k:

$$\left(\sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) dq_k = \sum_i R_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k\right) = \sum_i R_i \, dx_i.$$

Здесь dx_i — приращения декартовых координат, возникающие в том случае, когда q_k получает приращение dq_k, остальные же обобщенные координаты остаются неизменными. Однако согласно (2.7) сумма $\sum_i R_i \, dx_i$ для любых dx_i, совместимых со связями, равна нулю (напомним, что мы предполагаем связи стационарными и идеальными). Таким образом,

$$\left(\sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) dq_k = 0$$

и, поскольку $dq_k \neq 0$, мы приходим к выводу, что

$$\sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0. \tag{4.11}$$

Величину

$$Q_k^* = \sum_i F_i^* \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \tag{4.12}$$

(см. второе слагаемое в правой части уравнения (4.10)) называют *обобщенной силой*. Основанием для

такого названия служит то обстоятельство, что выражение

$$Q_k^* dq_k = \sum_i F_i^* \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k \right) = \sum_i F_i^* dx_i$$

дает работу, совершаемую силами F_i^* при перемещениях частиц, обусловленных увеличением обобщенной координаты q_k на dq_k.

Таким образом, правая часть уравнения (4.10) есть просто Q_k^*. Рассмотрим теперь левую часть этого уравнения. Прибавим к уменьшаемому и вычитаемому левой части сумму $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$. Тогда слева в (4.10) будет стоять разность выражений

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \tag{4.13}$$

и

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}. \tag{4.14}$$

Последнее выражение представляет собой производную функции Лагранжа по обобщенной координате q_k: $\partial L/\partial q_k$.

Выражение (4.13) можно с учетом (4.9) записать в виде

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

Наконец, произведя замену $\partial x_i/\partial q_k$ в соответствии с (4.6), придем к выражению

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k},$$

которое есть не что иное, как $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. Действительно, по правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k},$$

но согласно (4.7) все $\partial x_i/\partial \dot{q}_k$ равны нулю, так что первая из сумм дает нуль. Таким образом, мы показали, что выражение (4.13) равно $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$.

Итак, разность выражений (4.13) и (4.14) есть просто $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}$. Подставив это значение в (4.10), придем к уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_k^* \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{4.15}$$

которые отличаются от уравнений (4.1) тем, что вместо декартовых координат x_i в них входят обобщенные координаты q_k, а вместо сил F_i^* — обобщенные силы Q_k^*. Реакции связей R_i в уравнения (4.15) не входят.

Если все силы, действующие на частицы системы (кроме реакций связей), потенциальны, уравнения (4.15) имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{4.16}$$

Уравнения (4.15) и (4.16) суть уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. Фигурирующая в них функция $L=L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s)$ есть функция, получающаяся из (3.6) путем замены величин x_i и $\dot{x}_i$ функциями (4.3) и (4.4).

Можно показать (см. Приложение I), что уравнения (4.15) и (4.16) остаются справедливыми и для голономных систем с идеальными нестационарными связями.

Итак, мы доказали, что уравнения Лагранжа имеют одинаковый вид как в декартовых, так и в обобщенных координатах.

Из выражения (3.6) для функции Лагранжа в декартовых координатах вытекает, что производная L по $\dot{x}_i$ равна p_i — проекции импульса соответствующей частицы на одну из координатных осей:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=m_i\dot{x}_i=p_i, \tag{4.17}$$

а производная L по x_i равна F_i — проекции потенциальной силы, действующей на частицу:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i. \qquad (4.18)$$

По аналогии с (4.17) и (4.18) величину

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (4.19)$$

называют *обобщенным импульсом*, а величину

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (4.20)$$

— *обобщенной силой*.

С использованием этих величин уравнения (4.16) могут быть представлены в виде

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k, \qquad (4.21)$$

аналогичном уравнениям Ньютона

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i.$$

Отметим, что определение (4.20) является более общим, чем определение (4.12), введенное нами для непотенциальных сил. Если бы мы распространили определение (4.12) на потенциальные силы, т. е. силы, которые могут быть представлены в виде $F_i = -\partial U/\partial x_i$, то пришли бы к выражению

$$Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}. \qquad (4.22)$$

Согласно же определению (4.20)

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}. \qquad (4.23)$$

Выражение (4.23) отличается от (4.22) слагаемым $\partial T/\partial q_k$, которое, как будет показано в следующем параграфе, вообще говоря, отлично от нуля (см. формулу (5.9)).

§ 5. Функция Лагранжа и энергия

Функция Лагранжа $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ есть характеристическая функция механической системы. Естественно, что через эту функцию могут быть выражены не только импульсы и силы (см. формулы (4.19) и (4.20)), но также и энергия системы.

Выражение полной энергии системы через функцию Лагранжа имеет вид

$$E=\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t). \qquad (5.1)$$

Основания для того, чтобы определить E именно таким образом, выяснятся ниже. Выражение (5.1) является более общим, чем известное из курса общей физики выражение

$$E=T+U. \qquad (5.2)$$

Определение (5.1) остается пригодным и в том случае, когда полная энергия не может быть представлена в виде суммы кинетической и потенциальной энергий.

Вычислим полную производную по времени от величины (5.1):

$$\frac{dE}{dt}=\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+\sum_k \dot{q}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k- \\ -\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial t}=\sum_k\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial t}.$$

В соответствии с уравнением Лагранжа (4.15) выражение в скобках равно непотенциальной обобщенной силе Q_k^*. Следовательно,

$$\frac{dE}{dt}=\sum_k Q_k^*\dot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial t}=W^*-\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad (5.3)$$

где W^* — мощность всех непотенциальных сил, действующих на частицы системы.

В случае, когда функция Лагранжа не содержит явно времени, $\partial L/\partial t=0$ и формула (5.3) переходит в соотношение

$$\frac{dE}{dt}=W^*,$$

известное из курса общей физики.

Как следует из (5.3), для того, чтобы имело место сохранение полной энергии системы, недостаточно отсутствия непотенциальных сил. Кроме того, нужно еще, чтобы время не входило явно в функцию Лагранжа, т. е. чтобы система была консервативной. Итак, мы выяснили, что для замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, величина, определяемая формулой (5.1), остается постоянной. Это и послужило основанием для того, чтобы назвать величину (5.1) *полной энергией системы.*

В механике функции величин q_k и $\dot{q}_k$, сохраняющие при движении системы постоянное значение, определяемое начальными условиями, называют *интегралами движения*. Следовательно, можно сказать, что энергия консервативной замкнутой системы является интегралом движения.

Найдем условия, при которых определение (5.1) переходит в (5.2). С этой целью исследуем выражение T в обобщенных координатах. Связи будем считать голономными. Выразим декартовы координаты x_i частиц системы через обобщенные координаты q_k:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (5.4)$$

Отметим, что время будет входить явно в эти соотношения только в случае нестационарных связей.

Найдем полные производные функций x_i по времени. Поскольку величины q_k суть функции от t, искомые производные имеют вид

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставим эти выражения в формулу для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2 =$$
$$= \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k +$$
$$+ \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2. \quad (5.5)$$

В соответствии с (5.4) выражения $\partial x_i/\partial t$ и $\partial x_i/\partial q_k$ суть функции от q_k и t, величины $\dot q_k$ в них не входят. Следовательно, первая из сумм в формуле (5.5) есть также функция от q_k и t. Обозначив эту функцию буквой α, напишем

$$\alpha(q_k, t) = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2. \tag{5.6}$$

Изменив во второй из сумм в формуле (5.5) порядок суммирования по i и k, приведем ее к виду

$$\sum_k \dot q_k \left\{\sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right\} = \sum_k \beta_k(q_j, t)\,\dot q_k,$$

где

$$\beta_k(q_j, t) = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \tag{5.7}$$

Наконец, представив один из множителей в третьей сумме в формуле (5.5) в виде $\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot q_k$, а другой множитель — в виде $\sum_l \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot q_l$, а затем, изменив порядок суммирования по i, k и l, запишем третью сумму так:

$$\sum_i \frac{m_i}{2}\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot q_k \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot q_l =$$

$$= \sum_{k,\,l} \dot q_k \dot q_l \sum_i \frac{m_i}{2}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l} = \sum_{k,\,l} \gamma_{kl}(q_j, t)\,\dot q_k \dot q_l,$$

где

$$\gamma_{kl}(q_j, t) = \sum_i \frac{m_i}{2}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}. \tag{5.8}$$

Итак, выражение кинетической энергии можно представить в виде

$$T = \alpha(q_j, t) + \sum_k \beta_k(q_j, t)\,\dot q_k + \sum_{k,\,l} \gamma_{kl}(q_j, t)\,\dot q_k \dot q_l. \tag{5.9}$$

В случае стационарных связей t не входит явно в функции (5.4). Поэтому $\partial x_i/\partial t = 0$, так что коэффи-

циенты $\alpha(q_j, t)$ и $\beta_k(q_j, t)$ превращаются в нуль. В коэффициенты γ_{kl} в этом случае время не входит явно. В итоге

$$T = \sum_{k,\, l} \gamma_{kl}(q_j)\, \dot{q}_k \dot{q}_l. \tag{5.10}$$

Таким образом, для системы со стационарными связями кинетическая энергия есть однородная квадратичная функция обобщенных скоростей $\dot{q}_k$.

В § 3 мы выяснили, что для системы частиц функция Лагранжа в декартовых координатах имеет вид

$$L(x_i, \dot{x}_i, t) = \sum_i \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} - U(x_i, t).$$

При переходе от декартовых к обобщенным координатам первый член написанного уравнения превратится, вообще говоря, в выражение (5.9). Если же ограничиться рассмотрением стационарных связей, первый член нужно заменить выражением (5.10). Второй член примет вид $U(q_k, t)$. В случае стационарных связей время будет входить явно в U при условии, что потенциальные силы нестационарны.

Итак, в случае стационарных связей функция Лагранжа системы частиц, написанная в обобщенных координатах, выглядит так:

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k) - U(q_k, t),$$

где T определяется формулой (5.10). Подставив это выражение в формулу (5.1), получим

$$E = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - T(q_k, \dot{q}_k) + U(q_k, t). \tag{5.11}$$

В соответствии с (5.10) T есть однородная квадратичная функция величин $\dot{q}_k$. Следовательно, для нее согласно теореме Эйлера (см. Приложение II) справедливо соотношение

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T.$$

Произведя такую замену в (5.11), придем к формуле

$$E = 2T - T + U = T(q_k, \dot{q}_k) + U(q_k, t).$$

Эта формула была получена при одном лишь предположении, что связи стационарны. Если, кроме того, и потенциальные силы будут стационарными, потенциал $U(q_k, t)$ превратится в потенциальную энергию $U(q_k)$ и формула (5.1) перейдет в (5.2).

Итак, определение (5.1) совпадает с (5.2) в случае, когда и связи, и потенциальные силы стационарны.

§ 6. Примеры на составление уравнений Лагранжа

Выбрав независимые обобщенные координаты, удобные для описания рассматриваемой системы, нужно установить вид функций

$$x_i = x_i(q_k, t) \quad \text{и} \quad \dot{x}_i = \dot{x}_i(q_k, \dot{q}_k, t)$$

и подставить их вместо величин x_i и $\dot{x}_i$ в выражение для функции Лагранжа

$$L = T(\dot{x}_i) - U(x_i, t) = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - U(x_i, t).$$

В результате получится функция Лагранжа в обобщенных координатах:

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k, t) - U(q_k, t).$$

Если в получившемся выражении для L окажутся слагаемые, не зависящие от q_k и $\dot{q}_k$, эти слагаемые можно отбросить, так как они не внесут вклада в величины $\partial L/\partial q_k$ и $\partial L/\partial \dot{q}_k$ и, следовательно, не окажут влияния на вид уравнений Лагранжа.

Иногда операцию нахождения функции $T(q_k, \dot{q}_k, t)$ удается сильно упростить. Это бывает возможно в тех случаях, когда легко устанавливается связь между элементарным перемещением частицы ds и приращениями обобщенных координат q_k. Так, например, в полярных координатах на плоскости (рис. 6.1) перемещение ds является диагональю прямоугольника, построенного на сторонах dr и $rd\varphi$ (нужно помнить о малости $d\varphi$). Следовательно, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. Разделив эту величину на dt^2, получим квадрат скорости частицы: $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Наконец,

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2). \qquad (6.1)$$

В случае цилиндрических координат к предыдущим двум (r и φ) добавляется третья координата z. Перемещение ds является диагональю прямоугольного параллелепипеда со сторонами dr, $rd\varphi$ и dz. Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \tag{6.2}$$

Приращениям полярных координат r, ϑ, φ соответствуют три взаимно перпендикулярных отрезка (рис. 6.2) с длинами dr, $dr\vartheta$, $r \sin\vartheta d\varphi$ (последний отрезок направлен за чертеж[1])). Перемещение ds совпадает с диагональю прямоугольного параллелепипеда, построенного на этих отрезках. В итоге

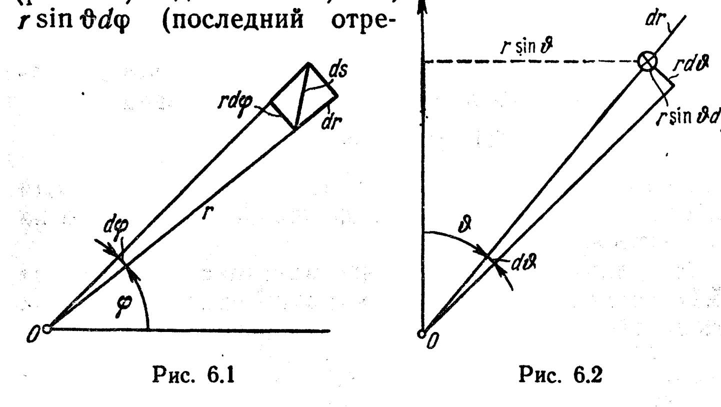


Рис. 6.1 Рис. 6.2

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2). \tag{6.3}$$

Рассмотрим несколько примеров.

1. Математический маятник (см. рис. 1.1). Перемещение частицы m равно $ds = ld\varphi$. Поэтому $T = {}^1/_2 ml^2\dot{\varphi}^2$. Потенциальная энергия $U = -mgl\cos\varphi$. Следовательно, функция Лагранжа имеет вид

$$L = {}^1/_2 ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi.$$

Предоставляем читателю написать уравнение Лагранжа и убедиться в том, что оно совпадает с уравнением (1.1).

[1]) Отрезки, перпендикулярные к плоскости чертежа, мы будем изображать кружком с точкой, если отрезок направлен на нас, и кружком с крестиком, если отрезок направлен на чертеж.

Найдем обобщенный импульс и обобщенную силу. Согласно формуле (4.19)

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = ml^2\dot\varphi = mvl.$$

Таким образом, в данном случае обобщенный импульс совпадает с моментом обычного импульса mv относительно точки подвеса маятника.

Согласно формуле (4.20)

$$Q_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi,$$

что есть момент N силы mg относительно точки подвеса. Заметим, что элементарная работа равна

$$dA = Q_\varphi\, d\varphi = N\, d\varphi.$$

Последнее выражение совпадает с выражением для работы при вращательном движении, известным из элементарной механики.

Наконец, найдем энергию маятника по формуле (5.1) (в данном случае это можно сделать, так как связь стационарна):

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\dot\varphi - L = ml^2\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 - mgl\cos\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}m(l\dot\varphi)^2 - mgl\cos\varphi.$$

2. Маятник с равномерно движущейся точкой подвеса. Пусть точка подвеса математического маятника движется в горизонтальном направлении с постоянной скоростью **v**, лежащей в плоскости качаний маятника (рис. 6.3). Уравнение связи имеет вид

$$f(x, y, t) = (x - vt)^2 + y^2 - l^2 = 0$$

(связь не стационарна).

Из выражений для декартовых координат

$$x = l\sin\varphi + vt, \quad y = l\cos\varphi$$

следует, что

$$\dot x = l\cos\varphi\cdot\dot\varphi + v, \quad \dot y = -l\sin\varphi\cdot\dot\varphi.$$

Отсюда

$$T = {}^1/_2 m(l^2\dot\varphi^2 + 2vl\cos\varphi\cdot\dot\varphi + v^2).$$

Потенциальная энергия $U = -mgy = -mgl\cos\varphi$.

При составлении функции Лагранжа постоянно слагаемое $^1/_2 mv^2$ можно отбросить. Следовательно,

$$L = \frac{1}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2vl\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) + mgl\cos\varphi.$$

Несмотря на нестационарность связи, время не вошло явно в функцию L.

Нахождение уравнения Лагранжа в этом и следующих примерах предоставляем читателю.

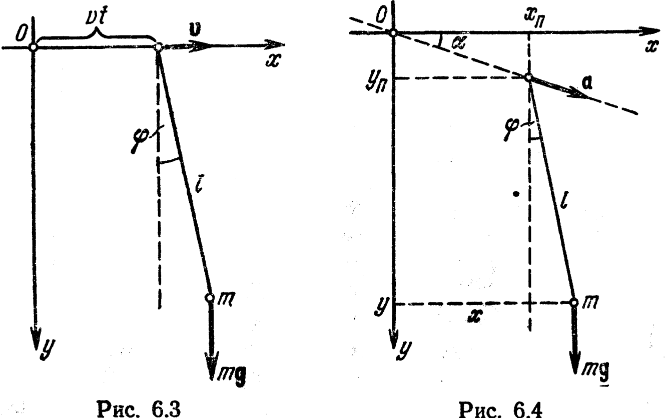


Рис. 6.3 Рис. 6.4

3. Маятник с точкой подвеса, движущейся с постоянным ускорением. Рассмотрим математический маятник, точка подвеса которого движется вдоль прямой, наклоненной к горизонту под углом α, с постоянным ускорением **a** (рис. 6.4). Координаты точки подвеса равны

$$x_п = \frac{1}{2}a\cos\alpha \cdot t^2, \quad y_п = \frac{1}{2}a\sin\alpha \cdot t^2,$$

а координаты точки m:

$$x = \frac{1}{2}a\cos\alpha \cdot t^2 + l\sin\varphi, \quad y = \frac{1}{2}a\sin\alpha \cdot t^2 + l\cos\varphi.$$

Продифференцируем x и y по t:

$$\dot{x} = a\cos\alpha \cdot t + l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = a\sin\alpha \cdot t - l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Подставив эти значения $\dot{x}$ и $\dot{y}$ в выражение для кинетической энергии, получим

$$T = \frac{1}{2}ma^2t^2 + mal(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)\dot{\varphi}t + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная энергия равна

$$U = -mgy = -mg\left(\tfrac{1}{2}a\sin\alpha\cdot t^2 + l\cos\varphi\right).$$

При написании выражения для функции Лагранжа можно опустить слагаемые $\tfrac{1}{2}ma^2t^2$ в T и $-\tfrac{1}{2}mga\sin\alpha\cdot t^2$ в U, так как эти слагаемые не содержат φ и $\dot\varphi$, вследствие чего не могут повлиять на вид уравнений Лагранжа. В результате найдем, что

$$L = mal(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)\dot\varphi t + \tfrac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 + mgl\cos\varphi.$$

Функция Лагранжа зависит явно от t (это обусловлено нестационарностью связи), причем время вошло в L через кинетическую энергию T.

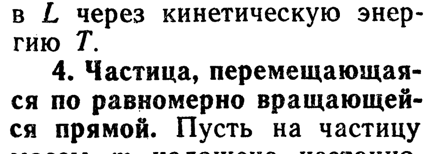


Рис. 6.5

4. Частица, перемещающаяся по равномерно вращающейся прямой. Пусть на частицу массы m наложена нестационарная связь, заключающаяся в том, что частица может двигаться только вдоль прямой, вращающейся с постоянной угловой скоростью ($\varphi = \omega t$) в вертикальной плоскости (рис. 6.5). Кроме реакции связи, на частицу действует потенциальная сила mg. Декартовы координаты частицы равны

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t.$$

Соответственно

$$\dot x = \dot r\cos\omega t - r\omega\sin\omega t, \quad \dot y = \dot r\sin\omega t + r\omega\cos\omega t.$$

Кинетическая энергия:

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\omega^2).$$

Потенциальная энергия:

$$U = mgy = mgr\sin\omega t$$

(когда мы перешли от декартовых координат к обобщенной координате r, в выражение для U вошло явно время t).

Наконец, функция Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\omega^2) - mgr\sin\omega t.$$

Она оказалась зависящей явно от t, причем на этот раз время вошло в L через потенциальную энергию U.

Обобщенный импульс:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = mv,$$

где v — скорость перемещения частицы по прямой.

Обобщенная сила:

$$Q_r = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2 - mg \sin \omega t$$

состоит из двух слагаемых, из которых первое $mr\omega^2$ есть центробежная сила инерции, а второе — $mg \sin \omega t$ — проекция силы mg на направление r.

5. Частица, перемещающаяся по прямой, вращающейся с ускорением. Пусть прямая, обусловливающая связь (см. рис. 6.5), вращается не равномерно, а с ускорением ($\varphi = \alpha t^2$). Тогда

$$x = r \cos \alpha t^2, \quad y = r \sin \alpha t^2,$$
$$\dot{x} = \dot{r} \cos \alpha t^2 - r2\alpha t \sin \alpha t^2,$$
$$\dot{y} = \dot{r} \sin \alpha t^2 + r2\alpha t \cos \alpha t^2,$$
$$T = {}^1/_2 m (\dot{r}^2 + r^2 4\alpha^2 t^2),$$
$$U = mgy = mgr \sin \alpha t^2.$$

Соответственно

$$L = {}^1/_2 m (\dot{r}^2 + r^2 4\alpha^2 t^2) - mgr \sin \alpha t^2.$$

В этом примере время вошло явно в L и через T, и через U.

§ 7. Принцип наименьшего действия [1]

В основу механики вместо законов Ньютона может быть положен **принцип наименьшего действия** или принцип Гамильтона [2]. *Действием* S за промежуток времени от t_1 до t_2 называется интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)\, dt, \tag{7.1}$$

где $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ — функция Лагранжа рассматриваемой

[1] Прежде чем приступить к изучению этого параграфа, следует ознакомиться с Приложением III.

[2] Этот принцип был установлен ирландским математиком Гамильтоном в 1834 г.

системы. Интегрирование производится от момента времени t_1, в который положение системы характеризуется значениями координат $q_k(t_1)$, до момента t_2, в который положение системы определяется значениями координат $q_k(t_2)$.

Согласно принципу наименьшего действия система между положениями $q_k(t_1)$ и $q_k(t_2)$ движется таким образом (т. е. функции $q_k(t)$ имеют такой вид), что действие (7.1) имеет наименьшее возможное значение. Воспользовавшись представлением о конфигурационном пространстве, можно сказать, что точка, изображающая положение системы, движется в этом пространстве по той кривой, для которой действие S минимально.

Принцип Гамильтона представляет собой наиболее общую формулировку закона движения механических систем. Достоинство этой формулировки состоит в том, что ее можно легко распространить на системы, не являющиеся чисто механическими, например на упругие среды, электромагнитные поля и т. п.

Как следует из (7.1), размерность действия равна размерности произведения энергии на время (или импульса на перемещение). Такой же размерностью обладает постоянная Планка, которую называют также квантом действия.

Из принципа наименьшего действия легко получить уравнения Лагранжа. Действие S представляет собой функционал (см. Приложение III). Согласно положениям вариационного исчисления функционал достигает экстремального значения при условии, что его вариация равна нулю. Следовательно, принцип наименьшего действия можно выразить условием

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)\, dt = 0. \qquad (7.2)$$

По этой причине принцип наименьшего действия называют *вариационным принципом механики*.

Из вариационного исчисления известно (см. Приложение III), что вариация функционала типа (7.1) [1])

[1]) Ср. с (III.20). В данном случае роль $f(x, y_k, y_k')$ играет $L(t, q_k, \dot{q}_k)$. Роль независимой переменной x играет t, роль $y_k(x)$ играет $q_k(t)$ и роль $y_k'(x)$ — функция $\dot{q}_k(t)$.

обращается в нуль, если в качестве $q_k(t)$ взять функции, удовлетворяющие уравнениям Эйлера (III.25). В данном случае уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{7.3}$$

т. е. совпадают с уравнениями Лагранжа.

Таким образом, мы убедились в том, что принцип Гамильтона приводит к уравнениям Лагранжа.

В Приложении III было показано (см. текст, следующий за формулой (III.19)), что прибавление в (7.2) к подынтегральной функции полной производной по t от любой функции обобщенных координат и времени не изменяет условий экстремума, т. е. уравнений (7.3). Следовательно, функцию Лагранжа следует определять с точностью до аддитивных слагаемых, представляющих собой полную производную по времени от произвольной функции обобщенных координат и времени (константа является частным случаем такой функции). Это обстоятельство нами уже отмечалось в § 4 и было использовано в § 6.

Глава II

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 8. Сохранение энергии

В основе законов сохранения, рассматриваемых в механике, лежат свойства пространства и времени. Сохранение энергии связано с однородностью времени, сохранение импульса — с однородностью пространства и, наконец, сохранение момента импульса находится в связи с изотропией пространства [1]).

Начнем с закона сохранения энергии. Пусть система частиц находится в неизменных внешних условиях (это имеет место, если система замкнута либо подвержена воздействию постоянного внешнего силового поля); связи (если они есть) идеальны и стационарны. В этом случае время в силу своей однородности не может входить явно в функцию Лагранжа. Действительно, однородность означает равнозначность всех моментов времени. Поэтому замена одного момента времени другим без изменения значений координат и скоростей частиц не должна изменять механические свойства системы. Это, конечно, справедливо лишь в том случае, если замена одного момента времени другим не изменяет условий, в которых находится система, т. е. в случае независимости от времени

[1]) Однородность означает одинаковость свойств во всех точках. Изотропия означает одинаковость свойств в каждой точке по всем направлениям. Однородность и изотропия независимы друг от друга. Среда может иметь разные свойства в разных точках, причем в каждой точке свойства будут иными, чем в других точках, но одинаковыми по всем направлениям. Такая среда будет неоднородной, но изотропной. Возможна среда, свойства которой одинаковы во всех точках, но различны (одинаковым образом во всех точках) по разным направлениям. Такая среда будет однородной, но анизотропной. Разумеется, возможны среды однородные и изотропные, а также неоднородные и анизотропные.

внешнего поля (в частности, это поле может отсутствовать).

Итак, для замкнутой системы или системы, находящейся в стационарном силовом поле, $\partial L/\partial t = 0$. Следовательно,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k. \tag{8.1}$$

Если система консервативна, движение частиц подчиняется уравнениям (4.16). Заменим в соответствии с этими уравнениями $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ через $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. Тогда выражению (8.1) можно придать вид

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k.$$

Последнее соотношение можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L\right) = 0.$$

Согласно формуле (5.1) величина, стоящая в скобках, есть энергия системы E. Таким образом, мы пришли к утверждению, что $dE/dt = 0$, откуда

$$E = \text{const}. \tag{8.2}$$

Итак из однородности времени вытекает закон: *энергия замкнутой (или находящейся в стационарном внешнем силовом поле) консервативной системы частиц остается постоянной.*

Из определения (5.1) следует, что E есть функция обобщенных координат q_k и обобщенных скоростей $\dot{q}_k$. Как мы уже отмечали, функции величин q_k и $\dot{q}_k$, сохраняющие при движении постоянное значение, определяемое начальными условиями, называют *интегралами движения.* Таким образом, энергия замкнутой системы является интегралом движения.

§ 9. Сохранение импульса

Рассмотрим замкнутую систему частиц. Замкнутость означает, что воздействие внешних тел на частицы системы пренебрежимо мало. В силу однородно-

сти пространства перемещение всех частиц системы на одинаковый отрезок $\delta\mathbf{r}$ не должно изменить механические свойства системы — функция Лагранжа должна сохранить свое прежнее значение. Для незамкнутой системы такой перенос вызвал бы изменение расположения частиц по отношению к взаимодействующим с ними телам, что отразилось бы на механических свойствах системы. Таким образом, только для замкнутой системы частиц можно утверждать, что параллельный перенос системы как целого не сопровождается изменением функции L $(\delta L = 0)$.

Полагая перемещение $\delta\mathbf{r}$ очень малым, можно написать

$$\delta L = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\mathbf{r} \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = 0\ ^{1)} \qquad (9.1)$$

(α — номер частицы). Мы воспользовались тем обстоятельством, что перемещения частиц $\delta\mathbf{r}_\alpha$ одинаковы и равны $\delta\mathbf{r}$.

По предположению $\delta\mathbf{r} \neq 0$. Поэтому из (9.1) вытекает, что

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = 0. \qquad (9.2)$$

В соответствии с уравнениями Лагранжа (3.8) можно написать

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_{\alpha x}},$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_{\alpha y}},$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_{\alpha z}}.$$

Умножив первое из этих уравнений на орт $\mathbf{e}_x$, второе на орт $\mathbf{e}_y$, третье на орт $\mathbf{e}_z$ [2]) и сложив их вместе, получим соотношение

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}. \qquad (9.3)$$

---

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 14. В соответствии со сказанным в этом примечании

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

[2]) Вместо символов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ мы будем обозначать орты координатных осей символом $\mathbf{e}$ с соответствующим индексом.

Таким образом, уравнению (9.2) можно придать вид

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{\alpha}}=0. \qquad (9.4)$$

Величина $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{\alpha}}$ есть вектор с компонентами $\frac{\partial L}{\partial v_{\alpha x}}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha}}$, $\frac{\partial L}{\partial v_{\alpha y}}=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{\alpha}}$, $\frac{\partial L}{\partial v_{\alpha z}}=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_{\alpha}}$. Согласно (4.17) эти произведения суть проекции на координатные оси обычного (не обобщенного) импульса $\mathbf{p}_{\alpha}$ частицы с номером α. Следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{\alpha}}=\mathbf{p}_{\alpha}. \qquad (9.5)$$

С учетом этого обстоятельства уравнение (9.4) запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}=0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{p}=\sum_{\alpha}\mathbf{p}_{\alpha}=\text{const}, \qquad (9.6)$$

где $\mathbf{p}$ — суммарный импульс системы.

Итак, исходя из однородности пространства, мы пришли к закону: *суммарный импульс замкнутой системы частиц остается постоянным*. Следовательно, импульс замкнутой системы есть также интеграл движения.

§ 10. Сохранение момента импульса

Вследствие изотропии пространства механические свойства замкнутой системы частиц не должны изменяться при произвольном повороте системы как целого в пространстве. В соответствии с этим не должна изменяться и функция Лагранжа ($\delta L=0$). Найдем приращение функции Лагранжа δL при произвольном очень малом повороте системы на угол $\delta\boldsymbol{\varphi}$. Вместе с системой повернутся все векторы, характеризующие систему, вследствие чего эти векторы получат некоторые приращения, которые будут того же порядка, что и $\delta\boldsymbol{\varphi}$. Согласно формуле (VI. 46)

$$\delta\mathbf{r}_{\alpha}=[\delta\boldsymbol{\varphi},\ \mathbf{r}_{\alpha}],\qquad \delta\mathbf{v}_{\alpha}=[\delta\boldsymbol{\varphi},\ \mathbf{v}_{\alpha}]. \qquad (10.1)$$

Ввиду малости величин $\delta\mathbf{r}_\alpha$ и $\delta\mathbf{v}_\alpha$

$$\delta L = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\delta\mathbf{r}_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\delta\mathbf{v}_\alpha$$

(напомним, что $L = L(\mathbf{r}_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_\alpha) = L(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)$, время t в L явно не входит). С учетом (10.1)

$$\delta L = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha}[\delta\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}_\alpha] + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}[\delta\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}_\alpha]. \qquad (10.2)$$

Из векторной алгебры известно, что в смешанном (векторно-скалярном) произведении трех векторов допустима циклическая перестановка сомножителей (см. формулу (VI. 3)). Произведя такую перестановку в (10.2), получим

$$\delta L = \sum_\alpha \delta\boldsymbol{\varphi}\left[\mathbf{r}_\alpha, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\right] + \sum_\alpha \delta\boldsymbol{\varphi}\left[\mathbf{v}_\alpha, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\right].$$

Вынесем $\delta\boldsymbol{\varphi}$ за знак суммы, одновременно заменив в соответствии с уравнениями Лагранжа (9.3) $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha}$ через $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}$:

$$\delta L = \delta\boldsymbol{\varphi}\left\{\sum_\alpha \left[\mathbf{r}_\alpha, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\right] + \sum_\alpha \left[\mathbf{v}_\alpha, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\right]\right\} = \\ = \delta\boldsymbol{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_\alpha \left[\mathbf{r}_\alpha, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\right].$$

По предположению $\delta\boldsymbol{\varphi} \neq 0$, поэтому условие $\delta L = 0$ эквивалентно условию

$$\frac{d}{dt}\sum_\alpha \left[\mathbf{r}_\alpha, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\right] = 0$$

или

$$\sum_\alpha \left[\mathbf{r}_\alpha, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\right] = \text{const}.$$

Согласно (9.5) $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}$ есть обычный импульс $\mathbf{p}_\alpha$. Величина $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ есть момент импульса частицы относительно начала координат. Следовательно, мы пришли к утверждению, что

$$\mathbf{M} = \sum_\alpha \mathbf{M}_\alpha = \sum_\alpha [\mathbf{r}_\alpha \mathbf{p}_\alpha] = \text{const}. \qquad (10.3)$$

В этом соотношении $\mathbf{M}_\alpha$ — момент импульса частицы с номером α, $\mathbf{M}$ — результирующий момент импульса системы.

Итак, исходя из изотропии пространства, мы пришли к закону: *результирующий момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным.* Значит, момент импульса замкнутой системы, так же как ее энергия и импульс, является интегралом движения.

Пусть система частиц находится во внешнем центральном поле сил, т. е. в таком поле, в котором сила, действующая на любую из частиц, имеет направление, проходящее через одну и ту же неподвижную точку O (центр поля), а модуль силы зависит только от расстояния r частицы до этой точки. Потенциальная энергия частицы в таком поле имеет вид

$$U = U(r). \qquad (10.4)$$

Произвольный поворот системы в пространстве вокруг точки O не изменяет механических свойств системы (расположение частиц по отношению к силовому центру O остается при таком повороте неизменным). Следовательно, хотя в данном случае система частиц и не является замкнутой, ее момент импульса будет постоянным. Правда, это справедливо лишь для момента, взятого относительно точки O. В случае же замкнутой системы сохраняется момент импульса, взятый относительно любой точки.

Если внешнее поле обладает осевой симметрией (это значит, что потенциальная энергия частицы зависит лишь от расстояния частицы до заданной оси), то механические свойства системы не будут изменяться при повороте вокруг оси поля. Следовательно, будет постоянным момент импульса системы относительно этой оси (напомним, что моментом относительно оси называется проекция на эту ось момента, взятого относительно любой из точек оси).

Глава III

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

§ 11. Движение частицы в центральном поле сил

Рассмотрим движение частицы в центральном поле вида

$$U(r)=\frac{a}{r}, \tag{11.1}$$

где a — константа, которая может быть либо положительной, либо отрицательной. Положительная константа отвечает случаю отталкивания частицы от силового центра (например, кулоновской силе отталкивания), отрицательная константа — случаю притяжения частицы к центру (кулоновской силе притяжения или силе гравитационного взаимодействия данной частицы с неподвижной частицей, помещающейся в центре поля).

В § 10 мы установили, что в центральном поле остается постоянным момент импульса частицы:

$$\mathbf{M}=[\mathbf{r}\mathbf{p}]=\mathrm{const}.$$

Векторное произведение перпендикулярно к плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы. Отсюда следует, что при неизменном направлении вектора $\mathbf{M}$ вектор $\mathbf{r}$ всегда лежит в одной плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{M}$, и траектория частицы является плоской кривой. Будем определять положение частицы с помощью полярных координат r и φ, совместив начало координат с центром поля. В этих координатах функция Лагранжа имеет вид (см. формулу (6.1))

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-\frac{a}{r}.$$

В функцию L не вошла явно координата φ. Обобщенные координаты, не входящие явно в функцию

Лагранжа, называются *циклическими*. В отсутствие непотенциальных сил уравнения Лагранжа, соответствующие циклическим координатам, выглядят следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=0.$$

Отсюда

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\text{const}. \qquad (11.2)$$

Таким образом, обобщенные импульсы, соответствующие циклическим координатам, оказываются постоянными, т. е. являются интегралами движения.

В рассматриваемой нами задаче уравнение (11.2) имеет вид

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}=M=\text{const}. \qquad (11.3)$$

Это уравнение можно было написать сразу, учтя, что $mr^2\dot{\varphi}$ есть момент импульса частицы относительно начала координат, который должен сохраняться в центральном поле сил.

Энергия частицы в центральном поле также является интегралом движения. Поэтому, произведя вычисления по формуле (5.11), можно написать

$$E=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{a}{r}=\text{const}. \qquad (11.4)$$

Для нахождения траектории частицы лучше исходить из уравнений (11.3) и (11.4), чем из уравнений Лагранжа. Такой путь проще, так как уравнения Лагранжа содержат вторые производные координат, уравнения же (11.3) и (11.4) — первые производные координат по времени.

Исключив из уравнений (11.3) и (11.4) $\dot{\varphi}$, получим

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{M^2}{2mr^2}+\frac{a}{r},$$

откуда

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{1}{m}\sqrt{2mE-\frac{2am}{r}-\frac{M^2}{r^2}}.$$

Из уравнения (11.3)

$$\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{m}\frac{M}{r^2}.$$

Исключив dt из последних двух уравнений, найдем, что

$$d\varphi = \frac{(M/r^2)\,dr}{\sqrt{2mE - \frac{2am}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} =$$

$$= \frac{(M/r^2)\,dr}{\sqrt{2mE + \left(\frac{am}{M}\right)^2 - \left(\frac{am}{M} + \frac{M}{r}\right)^2}}.$$

Введя обозначения

$$2mE + \left(\frac{am}{M}\right)^2 = b^2, \quad \frac{am}{M} + \frac{M}{r} = u \quad \left(-\frac{M}{r^2}\,dr = du\right),$$

можно написать

$$\varphi = -\int \frac{du}{\sqrt{b^2 - u^2}} = \arccos\frac{u}{b} + \varphi_0,$$

где φ_0 — постоянная интегрирования.

Возвращаясь к прежним обозначениям, мы получим уравнение траектории частицы в полярных координатах

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos\frac{am/M + M/r}{\sqrt{2mE + (am/M)^2}} =$$

$$= \arccos\frac{1 + (M^2/am)(1/r)}{\sqrt{1 + 2EM^2/ma^2}}. \qquad (11.5)$$

Из уравнения (11.5) следует, что при заданной величине r разность $\varphi - \varphi_0$ может иметь два отличающихся знаком значения $(\cos(-\alpha) = \cos\alpha)$. Отсюда легко заключить, что кривая, описываемая уравнением (11.5), симметрична относительно прямой, образующей с осью, от которой отсчитывается φ, угол φ_0.

Чтобы выяснить характер кривой, описываемой уравнением (11.5), введем обозначения

$$\frac{M^2}{|a|\,m} = p, \qquad (11.6)$$

$$\sqrt{1 + 2EM^2/ma^2} = e. \qquad (11.7)$$

Тогда уравнение траектории примет вид

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos\frac{1 \pm p/r}{e}$$

или, после несложных преобразований,

$$r = \mp \frac{p}{1 - e\cos(\varphi - \varphi_0)} \tag{11.8}$$

(верхний знак соответствует случаю отталкивания, нижний — случаю притяжения частицы к центру сил).

Полученное нами уравнение есть уравнение конического сечения (см. Приложение IV) с фокальным параметром p и эксцентриситетом e.

Рассмотрим сначала случай отталкивания ($a > 0$). В этом случае $U > 0$, так что полная энергия E не может быть отрицательной. Поэтому согласно (11.7) $e > 1$. Таким образом, в случае отталкивания траекторией частицы может быть только гипербола. Взяв в (11.8) верхний знак (минус), получим уравнение траектории

$$r = \frac{-p}{1 - e\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Значение φ_0 определяется выбором начала отсчета φ. Если угол φ отсчитывать от оси симметрии кривой (от прямой, проходящей через фокусы), то r не должно изменяться при изменении знака φ. Это имеет место лишь при $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \pi$. Положив $\varphi_0 = 0$, получим уравнение

$$r = \frac{-p}{1 - e\cos\varphi},$$

совпадающее с уравнением (IV. 14), которое описывает правую ветвь гиперболы (при условии, что начало координат, т. е. силовой центр, помещено во внешнем (левом) фокусе гиперболы).

Положив $\varphi_0 = \pi$ и учтя, что $\cos(\varphi - \pi) = -\cos\varphi$, получим уравнение

$$r = \frac{-p}{1 + e\cos\varphi},$$

совпадающее с уравнением (IV. 13), описывающим левую ветвь гиперболы (при условии, что начало координат помещено во внешнем (правом) фокусе гиперболы; рис. 11.1).

Теперь обратимся к случаю притяжения ($a < 0$). Ему соответствует в формуле (11.8) нижний знак

(плюс). Следовательно, уравнение траектории имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi} \tag{11.9}$$

для $\varphi_0 = 0$ и

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{11.10}$$

для $\varphi_0 = \pi$.

Как показано в Приложении IV, оба уравнения описывают либо эллипс, либо одну из ветвей гиперболы, либо параболу (см. уравнения (IV. 11) и (IV. 12)). С какой из этих кривых мы имеем дело, определяется значением e.

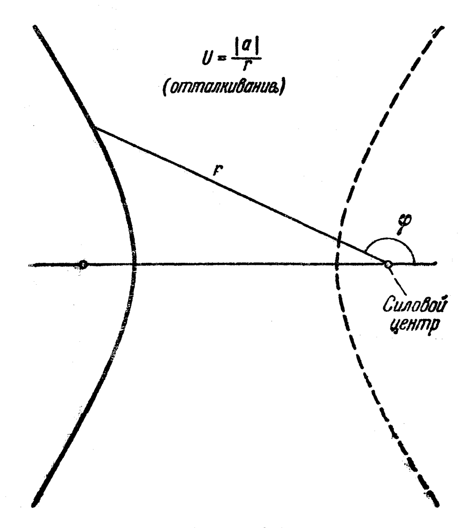


Рис. 11.1

В случае притяжения $U < 0$, следовательно полная энергия E может быть как положительной, так и отрицательной, в частности, она может оказаться равной нулю. Как следует из формулы (11.7), при $E > 0$ эксцентриситет оказывается больше единицы и траектория будет гиперболой. Уравнение (11.9) дает правую ветвь гиперболы, уравнение (11.10) — левую. При этом, в отличие от случая отталкивания, начало ко-

ординат, т. е. центр сил, помещается во внутреннем для данной ветви фокусе (рис. 11.2) [1]).

При $E=0$ эксцентриситет оказывается равным единице, и траектория будет параболой. Этот случай осуществляется, если частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности.

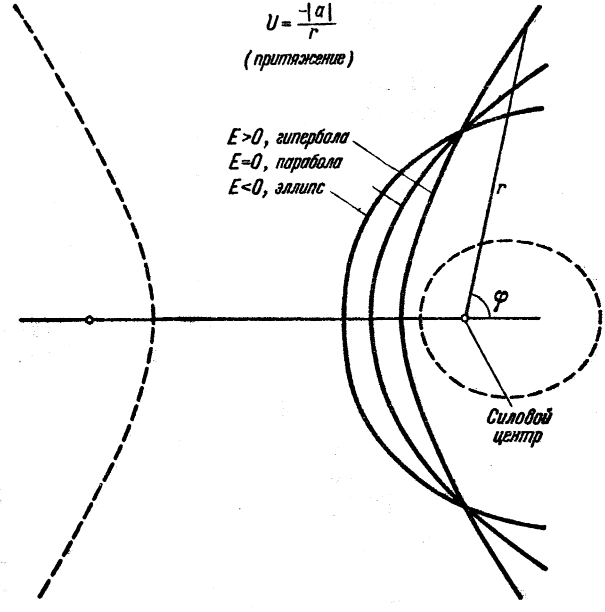


Рис. 11.2

Наконец, при $E<0$ эксцентриситет меньше единицы, и траектория будет эллипсом. В этом случае кривые, описываемые уравнениями (11.9) и (11.10), отличаются положением силового центра. Кривая (11.9) получается, если центр сил (начало координат) помещается в левом фокусе эллипса. Кривая (11.10) соответствует расположению центра сил в правом фокусе.

[1]) Сплошные кривые на рис. 11.2 изображены для одного и того же значения момента импульса M, а следовательно, для одинакового значения фокального параметра p. Штриховой эллипс соответствует меньшему значению M. Для меньшего значения M вершина параболы может оказаться правее вершины гиперболы, соответствующей большему M.

Если $1+(2EM^2/ma^2)=0$, т. е. $E=-ma^2/2M^2$, то, как следует из формулы (11.7), эксцентриситет обращается в нуль — траектория представляет собой окружность. При заданном M такое значение энергии в данном силовом поле является минимально возможным (меньшим E отвечает мнимое значение e).

Когда частица движется в ограниченной области пространства (частица не уходит в бесконечность), движение называется *финитным*. Если частица при движении уходит в бесконечность, движение называется *инфинитным*. Движение по эллипсу является финитным (напомним, что в этом случае $E<0$), движение по гиперболе и параболе — инфинитным ($E\geqslant 0$).

§ 12. Задача двух тел

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц с массами m_1 и m_2. Потенциальная энергия такой системы зависит от расстояния между частицами r, которое можно рассматривать как модуль вектора $\mathbf{r}$, проведенного от одной частицы (скажем, m_2) к другой (m_1): $U=U(r)$ (рис. 12.1).

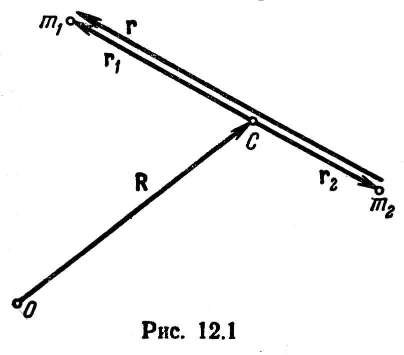


Рис. 12.1

Система имеет шесть степеней свободы. В качестве обобщенных координат возьмем три декартовы координаты центра инерции C системы (которым эквивалентен радиус-вектор $\mathbf{R}$ точки C) и три проекции вектора $\mathbf{r}$ на координатные оси. Вектор $\mathbf{r}$ можно представить в виде

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \qquad (12.1)$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радусы-векторы частиц относительно центра инерции. В соответствии с определением центра инерции

$$m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2=0. \qquad (12.2)$$

Решая совместно уравнения (12.1) и (12.2), можно найти, что

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \tag{12.3}$$

Положение частиц относительно начала координат определяется векторами $\mathbf{R} + \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{R} + \mathbf{r}_2$.

Напишем функцию Лагранжа системы:

$$L = \frac{m_1}{2}(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}_1)^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}_2)^2 - U(r).$$

Осуществив возведение в квадрат и приняв во внимание, что согласно (12.2) $m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = 0$, получим

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(r).$$

Наконец, заменив $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ через $\dot{\mathbf{r}}$ в соответствии с (12.3), придем к выражению для L в принятых нами «координатах» $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$[1]):

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r), \tag{12.4}$$

где

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{12.5}$$

— величина, называемая *приведенной массой* системы.

Функция (12.4) распадается на два независимых слагаемых:

$$L = L(\dot{\mathbf{R}}) + L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Первое из них описывает поведение центра инерции системы, второе — движение частиц относительно центра инерции.

Как вытекает из (12.4), координата $\mathbf{R}$ оказывается циклической (она не входит явно в L; см. предыдущий параграф). Следовательно,

$$\mathbf{p}_R = (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{const}$$

(импульс системы сохраняется; это можно было предвидеть заранее, ибо система замкнута). Центр инер-

---

[1]) Координатами без кавычек являются не сами векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$, а их проекции на координатные оси.

ции системы движется прямолинейно и равномерно (либо покоится).

Движение частиц относительно центра инерции описывается функцией

$$L = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 - U(r). \qquad (12.6)$$

Ее можно рассматривать как функцию Лагранжа частицы массы μ, движущейся в центральном поле с неподвижным центром. Положение частицы относительно силового центра определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Таким образом, задача о движении системы из двух взаимодействующих частиц (задача двух тел) оказалась сведенной к задаче о движении одной частицы в центральном поле сил. Эту задачу мы рассмотрели в предыдущем параграфе. Мы выяснили, что в случае, когда $U = a/r$, траекторией частицы будет коническое сечение. Следовательно, конец радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ скользит при движении частиц по кривой, представляющей собой коническое сечение. Согласно (12.3) радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ пропорциональны радиусу-вектору $\mathbf{r}$[1]). Таким образом, каждый из этих векторов также описывает коническое сечение. В зависимости от характера взаимодействия (притяжения либо отталкивания) и величины полной энергии системы траекторией каждой из частиц будет либо эллипс, либо парабола, либо гипербола.

Допустим, что вспомогательная воображаемая частица μ движется по эллипсу, описываемому уравнением

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Согласно (12.3) вектор $\mathbf{r}_1$ в любой момент времени имеет такое же направление, что и $\mathbf{r}$ ($\varphi_1 = \varphi$), а модуль его в $m_2/(m_1 + m_2)$ раз больше. Следовательно, частица m_1 движется по эллипсу:

$$r_1 = \frac{p_1}{1 - e\cos\varphi_1}, \qquad (12.7)$$

где $p_1 = pm_2/(m_1 + m_2)$.

---

[1]) По этой причине воображаемый силовой центр, под действием которого движется частица μ, нужно предполагать помещающимся в той точке, от которой откладываются векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, т. е. в центре инерции системы C.

Вектор $\mathbf{r}_2$ в каждый момент времени направлен противоположно вектору $\mathbf{r}$ (см. (12.3)). Поэтому, когда вектор $\mathbf{r}$ ориентирован под углом φ, вектор $\mathbf{r}_2$ ориентирован под углом $\varphi_2 = \pi + \varphi$. Модуль вектора $\mathbf{r}_2$ в $m_1/(m_1 + m_2)$ раз больше. Следовательно, учтя, что

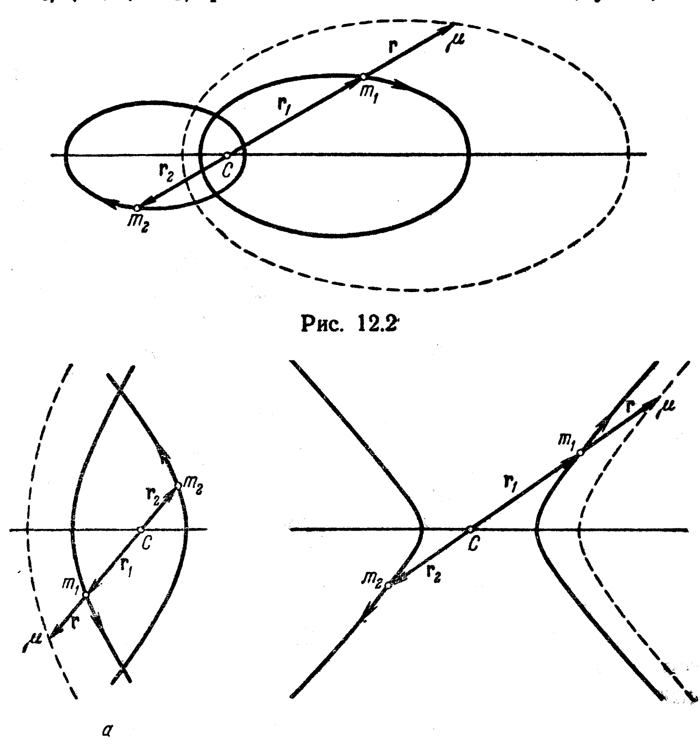


Рис. 12.2

а

Рис. 12.3

$\cos(\varphi_2 - \pi) = -\cos\varphi_2$, уравнение эллипса, по которому движется частица m_2, нужно записать в виде

$$r_2 = \frac{p_2}{1 + e\cos\varphi_2}, \tag{12.8}$$

где $p_2 = pm_1/(m_1 + m_2)$.

В случае, соответствующем уравнению (12.7), начало координат (т. е. центр инерции C) помещается в левом фокусе эллипса (см. формулу (IV. 11)). В случае, отвечающем уравнению (12.8), начало координат (точка C) помещается в правом фокусе эллипса

(см. формулу (IV. 12)). Следовательно, траектории частиц выглядят так, как показано на рис. 12.2[1]).

Предоставляем читателю самому убедиться в том, что в случае движения по гиперболам траектории частиц будут выглядеть так, как показано на рис. 12.3, *а* (в случае взаимного притяжения частиц), и на рис. 12.3, *б* (в случае отталкивания).

§ 13. Упругие столкновения частиц

Столкновением называется процесс, заключающийся в том, что взаимодействующие друг с другом частицы, придя из бесконечности (т. е. с такого расстояния, при котором их взаимодействием можно пренебречь), сближаются, а затем либо расходятся снова на бесконечность, либо остаются на конечном расстоянии друг от друга. В первом случае столкновение называется *рассеянием* частиц, а во втором — *захватом* частиц. Очевидно, что захват может наблюдаться только в том случае, если взаимодействие частиц имеет характер притяжения.

Когда говорят о столкновениях частиц, отнюдь не предполагают, что частицы приходят в соприкосновение, как это бывает, например, при столкновении двух шаров. Имеется в виду лишь то, что вследствие взаимодействия частицы изменяют направление или характер своего движения.

Рассмотрим упругое столкновение двух отталкивающихся частиц. Столкновение называется *упругим*, если оно не сопровождается изменением внутренней энергии частиц. Следовательно, при упругих столкновениях механическая энергия системы сталкивающихся частиц остается постоянной.

Проще всего процесс столкновения рассматривать в системе отсчета, связанной с центром инерции частиц (ее называют *ц*-системой). Однако на практике наблюдения за столкновениями производятся в системе отсчета, относительно которой центр инерции частиц движется со скоростью $\mathbf{v}_C$. Эту систему отсчета называют лабораторной системой или, короче, *л*-системой. Обычно в лабораторной системе одна из частиц до столкновения покоится.

---

[1]) Рис. 12.2 и 12.3 выполнены для $m_1/m_2 = 2/3$; $e = 0{,}8$ (рис. 12.2) и $e = 1{,}5$ (рис. 12.3).

Между скоростью i-й частицы в *л*-системе (мы будем обозначать ее символом $\mathbf{v}_i$) и скоростью той же частицы в *ц*-системе (эту скорость обозначим $\mathbf{v}_i^{(C)}$) имеется очевидное соотношение

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_i^{(C)}. \qquad (13.1)$$

Из определения центра инерции следует, что

$$\mathbf{v}_C = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая, когда в *л*-системе вторая частица до столкновения покоится. Тогда, обозначив скорость первой частицы до столкновения символом $\mathbf{v}_{10}$, получим, что

$$\mathbf{v}_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_{10}. \qquad (13.2)$$

Подставив это значение $\mathbf{v}_C$ в формулу (13.1), получим следующие выражения для скоростей частиц в *ц*-системе до столкновения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{10}^{(C)} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_{10}, \\ \mathbf{v}_{20}^{(C)} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_{10}. \end{aligned} \qquad (13.3)$$

Умножив первую из этих скоростей на m_1, а вторую — на m_2, найдем импульсы частиц до столкновения в *ц*-системе:

$$\mathbf{p}_{10}^{(C)} = \mu\mathbf{v}_{10},$$
$$\mathbf{p}_{20}^{(C)} = -\mu\mathbf{v}_{10}.$$

Здесь $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ — приведенная масса частиц.

Как это и должно быть, суммарный импульс частиц в *ц*-системе до столкновения равен нулю. Из закона сохранения импульса следует, что и после столкновения импульсы частиц в *ц*-системе могут отличаться лишь знаком: $\mathbf{p}_1^{(C)} = -\mathbf{p}_2^{(C)}$.

Суммарная кинетическая энергия частиц в результате упругого столкновения не может измениться (мы считаем, что до и после столкновения частицы находятся друг от друга настолько далеко, что их взаимная потенциальная энергия пренебрежимо мала).

Поэтому можно написать соотношение

$$\frac{p_{10}^2}{2m_1}+\frac{p_{20}^2}{2m_2}=\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}$$

(мы опустили верхний индекс «(C)» при символах импульсов). В сочетании с условием, что $|\mathbf{p}_{10}^{(C)}|=|\mathbf{p}_{20}^{(C)}|$ и $|\mathbf{p}_1^{(C)}|=|\mathbf{p}_2^{(C)}|$, написанное нами соотношение указывает на то, что импульсы (а следовательно, и скорости) частиц в результате столкновения лишь поворачиваются в *ц*-системе на некоторый угол χ, оставаясь неизменными по величине. Обозначим символом $\mathbf{e}_1$ единичный вектор скорости первой частицы в *ц*-системе после столкновения. Тогда в соответствии с формулами (13.3) можно написать для скоростей частиц после столкновения следующие выражения:

$$\mathbf{v}_1^{(C)}=\frac{m_2}{m_1+m_2}v_{10}\mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{v}_2^{(C)}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{10}\mathbf{e}_1.$$

Чтобы получить скорости частиц после столкновения в *л*-системе, воспользуемся формулой (13.1), подставив в нее выражение (13.2) для $\mathbf{v}_C$. В результате получим

$$\mathbf{v}_1=\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}_{10}+\frac{m_2}{m_1+m_2}v_{10}\mathbf{e}_1.$$

$$\mathbf{v}_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}_{10}-\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{10}\mathbf{e}_1.$$

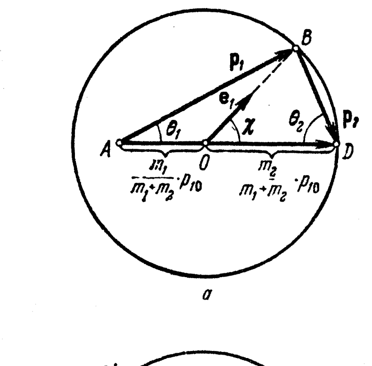
Для импульсов частиц в *л*-системе после столкновения получаются выражения

$$\mathbf{p}_1=\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{p}_{10}+\frac{m_2}{m_1+m_2}p_{10}\mathbf{e}_1,$$

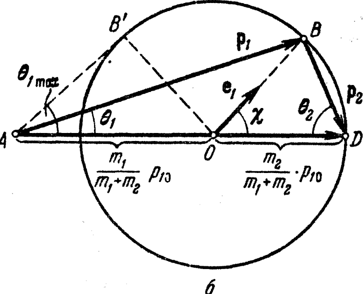
$$\mathbf{p}_2=\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{p}_{10}-\frac{m_2}{m_1+m_2}p_{10}\mathbf{e}_1. \qquad (13.4)$$

Полученные соотношения можно сделать очень наглядными с помощью следующего геометрического построения. Изобразим вектор $\mathbf{p}_{10}$ отрезком AD (рис. 13.1) и отметим на нем точку O, которая делит длину вектора в отношении $m_1:m_2$. Из точки O, как из центра, проведем окружность, проходящую через

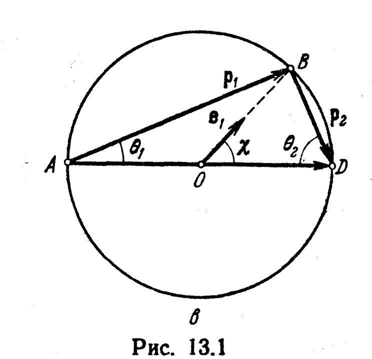
конец вектора $\mathbf{p}_{10}$. Радиус этой окружности равен $p_{10}m_2/(m_1+m_2)$. Если $m_1 < m_2$, точка A попадает внутрь окружности (рис. 13.1, *а*); если $m_1 > m_2$, точка A оказывается вне окружности (рис. 13.1, *б*); при $m_1 = m_2$ точка A лежит на окружности (рис. 13.1, *в*). Отложим из точки O под углом χ по отношению к $\mathbf{p}_{10}$ единичный вектор $\mathbf{e}_1$ направления, в котором по предположению летит относительно *ц*-системы первая частица. Тогда отрезок OB будет изображать вектор $\mathbf{e}_1 p_{10}m_2/(m_1+m_2)$ и в соответствии с формулами (13.4) отрезок AB даст вектор $\mathbf{p}_1$, а отрезок BD — вектор $\mathbf{p}_2$.



а



б



в

Рис. 13.1

Угол θ_1 между векторами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_{10}$ называется *углом рассеяния*. Он характеризует отклонение первой частицы, наблюдаемое в *л*-системе. Угол θ_2 между векторами $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_{10}$ называется *углом отдачи*. Сумма $\theta_1+\theta_2$ называется углом разлета частиц после столкновения. Углы θ_1 и θ_2 можно выразить через χ — угол отклонения первой частицы в *ц*-системе. Учтя, что длина отрезка OB равна $p_{10}m_2/(m_1+m_2)$, можно написать

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{[p_{10}m_2/(m_1+m_2)]\sin\chi}{p_{10}m_1/(m_1+m_2) + [p_{10}m_2/(m_1+m_2)]\cos\chi},$$

или

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}. \qquad (13.5)$$

Из равнобедренного треугольника OBD получается соотношение

$$\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \qquad (13.6)$$

Из рис. 13.1, *а* видно, что более легкая частица может рассеяться на более тяжелой ($m_1 < m_2$) в любом направлении (точка B может находиться в любом месте на окружности). Угол разлета частиц в этом случае всегда больше $\pi/2$.

В случае, когда $m_1 > m_2$ (рис. 13.1, *б*), угол рассеяния не может превысить некоторое предельное значение $\theta_{1\max}$ (ему соответствует точка B' на рисунке). Синус этого угла равен отношению отрезков OB' и OA, т. е.

$$\sin \theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}.$$

При $m_1 > m_2$ угол разлета частиц всегда меньше $\pi/2$.

Если массы частиц одинаковы ($m_1 = m_2$), частицы разлетаются после столкновения под прямым углом друг к другу ($\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$; рис. 13.1, *в*).

При лобовом ударе частицы разлетаются под углом $\theta_1 + \theta_2$, равном либо π (при $m_1 < m_2$; рис. 13.1, *а*), либо нулю (при $m_1 > m_2$; рис. 13.1, *б*). Угол χ при лобовом ударе равен π. Когда массы частиц одинаковы ($m_1 = m_2$), $\mathbf{p}_1$ оказывается равным нулю, а $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{10}$ (см. рис. 13.1, *в*; в рассматриваемом случае точка B совпадает с точкой A). Следовательно, частицы одинаковой массы при лобовом ударе обмениваются импульсами. Этот результат легко получить также из формул (13.4).

Полученные нами результаты являются следствием законов сохранения энергии и импульса и не зависят от характера взаимодействия частиц. Для того чтобы определить, под каким углом χ рассеивается частица, нужно знать закон взаимодействия частиц и их взаимное расположение при столкновении. Рассмотрению этого вопроса посвящен следующий параграф.

§ 14. Рассеяние частиц

В § 12 было показано, что задача о движении двух взаимодействующих частиц сводится к задаче о движении частицы с массой μ (μ — приведенная масса) в центральном поле сил, причем расстояние этой частицы от центра сил равно расстоянию между рассматриваемыми частицами. Найдя траекторию воображаемой частицы массы μ, легко найти траектории обеих частиц.

Воспользуемся этим приемом для изучения процесса рассеяния частицы m_1 частицей m_2, которая

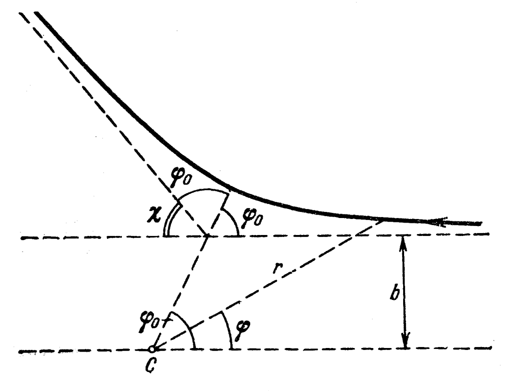


Рис. 14.1

первоначально неподвижна в *л*-системе. Перейдем в *ц*-систему и рассмотрим частицу μ, движущуюся в силовом поле, центр которого совпадает с центром инерции системы C. На больших расстояниях от центра поле будем полагать столь слабым, что движение частицы вдали от центра можно считать прямолинейным.

Введем в рассмотрение *прицельный параметр* или *прицельное расстояние* b, равное тому расстоянию, на котором пролетела бы частица мимо силового центра, если бы поле не оказывало на нее воздействия (рис. 14.1). Ясно, что угол отклонения частицы есть функция прицельного расстояния: $\chi = \chi(b)$, причем чем меньше b, тем, вообще говоря, должен быть больше χ. Обратив эту функцию, можно написать

$$b = b(\chi). \tag{14.1}$$

Предположим, что на силовой центр C падает пучок одинаковых частиц, летящих вдали от центра в одном и том же направлении и с одинаковой скоростью v_0. Этот пучок можно охарактеризовать плотностью потока частиц j, под которой подразумевается число частиц, пролетающих за секунду через перпендикулярную к пучку единичную площадку. Будем полагать, что пучок частиц однороден, т. е. что вдали от рассеивающего центра плотность потока одинакова во всех точках поперечного сечения пучка.

Частицы пучка отклоняются на разные углы χ в зависимости от того, с каким прицельным расстоянием приближается к центру та или иная частица. Частицы, прицельное расстояние которых окажется в пределах от b до $b+db$, будут рассеяны в пределах углов от χ до $\chi+d\chi$. Обозначим поток таких частиц (т. е. число частиц, рассеиваемых под углами от χ до $\chi+d\chi$ в единицу времени) через dN_χ. Отношение

$$d\sigma = \frac{dN_\chi}{j} \tag{14.2}$$

называют *дифференциальным эффективным сечением* (или *поперечником*) *рассеяния*. Одним из оснований для такого названия послужило то обстоятельство, что $d\sigma$, как следует из (14.2), имеет размерность площади. Легко видеть, что $d\sigma$ определяет относительное количество (долю) частиц, рассеиваемых в данном интервале углов.

В случае однородного по сечению пучка поток частиц, прицельное расстояние которых попадает в пределы от b до $b+db$, равен $j2\pi b db$ (поток = плотность потока × площадь). Этот поток рассеивается под углами от χ до $\chi+d\chi$. Следовательно, $dN_\chi = j2\pi b\, db$. Подставив это значение в формулу (14.2), получим

$$d\sigma = \frac{j2\pi b\, db}{j} = 2\pi b\, db$$

или, перейдя от переменной b к χ (см. (14.1)),

$$d\sigma = 2\pi b(\chi)\left|\frac{db}{d\chi}\right| d\chi \tag{14.3}$$

$\left(\text{мы взяли модуль } \frac{db}{d\chi}, \text{ поскольку } \frac{db}{d\chi} < 0\right)$.

Величину dN_χ в формуле (14.2) можно трактовать как поток частиц, летящих в пределах телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin\chi\, d\chi$ (такую величину имеет телесный угол, заключенный между конусами с углами раствора χ и $\chi + d\chi$). Заменив в (14.3) $2\pi d\chi$ через $d\Omega/\sin\chi$, можно привести формулу для дифференциального эффективного сечения рассеяния к виду

$$d\sigma = \frac{b(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\Omega. \qquad (14.4)$$

Формула (14.3), равно как и (14.4), является самой общей — она определяет дифференциальное эффективное сечение рассеяния в случае любого центрального рассеивающего поля. Величины $b(\chi)$ и $db/d\chi$ определяются характером силового поля, т. е. характером взаимодействия частиц. Следовательно, $d\sigma$ определяется видом рассеивающего поля и является важнейшей характеристикой процесса рассеяния. Исследовав экспериментально $d\sigma$, можно получить сведения о характере силового поля.

До сих пор шла речь о рассеянии пучка частиц на одном рассеивающем центре. Практически же наблюдают рассеяние на совокупности одинаковых рассеивающих центров. В связи с этим отметим следующее обстоятельство. На заметные углы χ отклоняются только те частицы, которые летят достаточно близко от рассеивающего центра (для которых прицельное расстояние мало). Поэтому если на пути частиц окажется n одинаковых не перекрывающих друг друга и достаточно разреженных рассеивающих центров, то эти центры будут осуществлять рассеяние независимо друг от друга и поток частиц, рассеиваемых в пределах углов от χ до $\chi + d\chi$, будет в n раз больше, чем при наличии только одного центра. Таким образом, в случае n центров

$$dN_\chi = nj\, d\sigma. \qquad (14.5)$$

Перейдем от частицы с массой μ, рассеиваемой неподвижным силовым центром, помещающимся в точке C, к реальным частицам m_1 и m_2. Траектории этих частиц геометрически подобны траектории частицы μ. Действительно, согласно (12.3) радиус-вектор первой частицы, проведенный из точки C, в $m_2/(m_1 + m_2)$ раз длиннее радиуса-вектора частицы μ, проведенного из

той же точки. Аналогичное соотношение справедливо и для второй частицы. Значит, в *ц*-системе частица m_1 отклоняется на тот же угол χ, что и частица μ. В качестве прицельного расстояния нужно брать расстояние, на котором пролетела бы первая частица мимо второй, если бы частицы не взаимодействовали (радиус-вектор $\mathbf{r}$ частицы μ, проведенный из силового центра C, совпадает с $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$).

Таким образом, формула (14.3) оказывается справедливой (в *ц*-системе) и для пучка частиц m_1, рассеиваемых частицей m_2. Для того чтобы перейти от *ц*-системы к лабораторной системе, в которой наблюдается рассеяние, необходимо в формуле (14.3) перейти от переменной χ к переменной θ_1. Этот переход осуществляется по формуле (13.5). Формула, которая при этом получается, в общем случае оказывается очень громоздкой.

В частном случае, когда $m_1 \ll m_2$ (рассеиваемые частицы много легче рассеивающих), $\theta_1 \approx \chi$ (см. формулу (13.5)), так что формулы (14.3) и (14.4) можно записать в *л*-системе:

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b(\theta_1)\left|\frac{db}{d\theta_1}\right| d\theta_1, \\ d\sigma &= \frac{b(\theta_1)}{\sin\theta_1}\left|\frac{db_1}{d\theta_1}\right| d\Omega. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Отметим, что в этом случае $\mu \approx m_1$ и $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_1$ (траектория частицы m_1 практически совпадает с траекторией частицы μ).

Рассмотрим случай кулоновского рассеивающего поля, т. е. поля вида $U = a/r$, полагая $m_1 \ll m_2$. Энергию рассеиваемой частицы можно представить выражением $E = {}^1/_2 m_1 v_0^2$, где v_0 — начальная (и конечная) скорость частицы m_1. Момент импульса частицы m_1 относительно центра рассеяния (совпадающего с частицей m_2) равен $M = m_1 v_0 b$ (см. рис. 14.1). Подставив эти значения E и M в формулу (11.5), придем к соотношению:

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos\frac{1 + \left(m_1 v_0^2 b^2/a\right)(1/r)}{\sqrt{1 + \left(m_1 v_0^2 b/a\right)^2}}. \tag{14.7}$$

Из рис. 14.1 видно, что при $r = \infty$ имеются два значения φ — нуль и $2\varphi_0$. В первом случае левая часть

формулы (14.7) обращается в $-\varphi_0$, во втором в $+\varphi_0$. Поэтому, положив в (14.7) $r=\infty$, можно написать

$$\varphi_0 = \left| \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\left(m_1 v_0^2 b/a\right)^2}} \right|,$$

откуда

$$\cos^2 \varphi_0 = \frac{1}{1+\left(m_1 v_0^2 b/a\right)^2}. \qquad (14.8)$$

Далее из рис. 14.1 следует, что $\chi = \pi - 2\varphi_0$, т. е. $\varphi_0 = \pi/2 - \chi/2 = \pi/2 - \theta_1/2$ (мы воспользовались тем, что в рассматриваемом случае можно положить $\theta_1 = \chi$). Подставив это значение φ_0 в формулу (14.8), получим

$$\sin^2 \frac{\theta_1}{2} = \frac{1}{1+\left(m_1 v_0^2 b/a\right)^2}.$$

Разрешив это соотношение относительно b, придем после несложных преобразований к выражению

$$b = b(\theta_1) = \frac{a}{m_1 v_0^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}. \qquad (14.9)$$

Дифференцирование по θ_1 дает

$$\frac{db}{d\theta_1} = -\frac{a}{m_1 v_0^2} \frac{1}{2 \sin^2 (\theta_1/2)}. \qquad (14.10)$$

Наконец, подставив выражения (14.9) и (14.10) в (14.6), получим формулы для дифференциального эффективного сечения рассеяния частиц массы m_1 в кулоновском поле, создаваемом частицей массы $m_2 (m_2 \gg m_1)$:

$$d\sigma = \pi \left(\frac{a}{m_1 v_0^2}\right)^2 \frac{\cos (\theta_1/2)}{\sin^3 (\theta_1/2)} d\theta_1, \qquad (14.11)$$

$$d\sigma = \left(\frac{a}{2 m_1 v_0^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 (\theta_1/2)}. \qquad (14.12)$$

Мы получили известную из общего курса физики *формулу Резерфорда* для рассеяния α-частиц на тяжелых ядрах. В этом можно убедиться, заменив a через $2Ze^2$ и умножив формулы (14.11) и (14.12) на плотность потока α-частиц j и число атомов рассеивающего вещества n, приходящееся на единицу

площади поперечного сечения пучка α-частиц. Тогда в левой части формулы получится выражение $nj\,d\sigma$, которое дает dN_{θ_1} — поток α-частиц, рассеиваемый в интервале углов от θ_1 до $\theta_1 + d\theta_1$, либо dN_Ω — поток α-частиц, рассеиваемых в телесный угол $d\Omega$ (см. формулу (14.5)).

Заметим, что найденные нами выражения для $d\sigma$ не зависят от знака a, так что полученный результат справедлив не только для случая кулоновского отталкивания частиц m_1 и m_2, но и для случая их кулоновского притяжения.

§ 15. Движение в неинерциальных системах отсчета

Функция Лагранжа одной частицы имеет вид

$$L = {}^1/_2 m\mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}) \tag{15.1}$$

только в инерциальных системах отсчета. Найдем вид L в произвольной неинерциальной системе отсчета. На рис. 15.1 изображена инерциальная система отсчета K и система K', начало которой (точка O') движется в системе K со скоростью $\mathbf{v}_0(t)$, а сама система K', кроме того, вращается относительно системы K с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$. Выразим функцию (15.1) через радиус-вектор $\mathbf{r}'$, определяющий положение частицы в системе K', и через скорость $\mathbf{v}'$ частицы, наблюдаемую в той же системе.

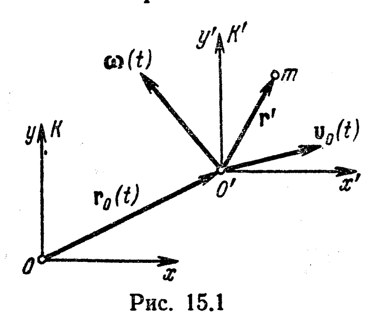


Рис. 15.1

Предположим сначала, что $\mathbf{v}_0(t) \equiv 0$ и начала обеих систем отсчета совпадают. Тогда между скоростями частицы в обеих системах имелось бы соотношение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] \tag{15.2}$$

(частица, неподвижная в системе K', имела бы в си-

стеме K скорость, равную $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$ [1])). Если же $\mathbf{v}_0(t)$ отлична от нуля, соотношение (15.2) примет вид

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0(t)+\mathbf{v}'+[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']. \qquad (15.3)$$

Подставим полученное нами выражение для $\mathbf{v}$ в формулу (15.1). В результате получим

$$L=\frac{m}{2}[\mathbf{v}_0(t)]^2+\frac{m\mathbf{v}'^2}{2}+\frac{m}{2}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']^2+ \\ +m\mathbf{v}_0(t)\,\mathbf{v}'+m\mathbf{v}_0(t)\,[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']+m\mathbf{v}'\,[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']. \qquad (15.4)$$

Первое слагаемое в этой формуле есть заданная функция времени, которая может быть представлена как полная производная по t от некоторой другой функции. В § 7 мы установили, что функцию Лагранжа следует определять с точностью до аддитивных слагаемых, представляющих собой полную производную по времени от произвольной функции обобщенных координат и времени. Поэтому слагаемое $(m/2)[\mathbf{v}_0(t)]^2$ следует опустить.

Рассмотрим четвертое и пятое слагаемые в формуле (15.4). Вынеся за скобки общий множитель, эти слагаемые можно представить в виде

$$m\mathbf{v}_0(t)\,\{\mathbf{v}'+[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']\}=m\mathbf{v}_0(t)\left\{\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}+\left[\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt},\ \mathbf{r}'\right]\right\}= \\ =m\mathbf{v}_0(t)\,\frac{\{d'\mathbf{r}'+[d\boldsymbol{\varphi},\ \mathbf{r}']\}}{dt}. \qquad (15.5)$$

Здесь $d'\mathbf{r}'$ — приращение $\mathbf{r}'$, наблюдаемое за время dt в системе K' (напомним, что $\mathbf{v}'$ — скорость частицы, наблюдаемая в системе K'), $d\boldsymbol{\varphi}$ — угол, на который поворачивается система K' за время dt.

Если одна из систем отсчета вращается относительно другой, то приращение некоторого вектора $\mathbf{a}$, наблюдаемое в обеих системах, будет неодинаковым. Это легко понять, предположив, что по отношению к вращающейся системе вектор не изменяется, т. е. приращение вектора в этой системе (обозначим ее K') равно нулю: $d'\mathbf{a}=0$. Тогда приращение вектора

---

[1]) Это выражение получается из формулы (VI. 46), если положить в ней $\mathbf{a}=\mathbf{r}'$ и разделить получившееся соотношение на dt.

в неподвижной системе (системе K) можно записать в виде

$$d\mathbf{a} = [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{a}]$$

(см. формулу (VI. 46)). Если же наблюдаемое во вращающейся системе приращение вектора $d'\mathbf{a}$ отлично от нуля, то приращение, наблюдаемое в неподвижной системе, будет равно

$$d\mathbf{a} = d'\mathbf{a} + [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{a}] \qquad (15.6)$$

(положив $\mathbf{a} = \mathbf{r}'$ и поделив на dt, мы придем к формуле (15.2)).

Сопоставив (15.6) с выражением, стоящим в фигурных скобках в правой части формулы (15.5), приходим к выводу, что это выражение представляет собой приращение вектора $\mathbf{r}'$, наблюдаемое в системе K, т. е. $d\mathbf{r}'$. Таким образом, сумме четвертого и пятого слагаемых формулы (15.4) можно придать вид

$$m\mathbf{v}_0(t)\frac{d\mathbf{r}'}{dt}.$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$m\mathbf{v}_0(t)\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\{m\mathbf{v}_0(t)\mathbf{r}'\} - m\mathbf{r}'\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}.$$

Первое слагаемое как полную производную по t от функции координат и времени можно отбросить. Во втором слагаемом $d\mathbf{v}_0/dt$ есть $\mathbf{w}_0(t)$ — ускорение начала координат системы K', наблюдаемое в системе K.

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для функции Лагранжа в переменных $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{v}'$:

$$L' = m\mathbf{v}'^2/2 + m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']^2/2 - m\mathbf{r}'\mathbf{w}_0(t) + m\mathbf{v}'[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] - U(\mathbf{r}'). \qquad (15.7)$$

Мы получили общий вид функции Лагранжа частицы в произвольной неинерциальной системе отсчета. Функцию U теперь нужно считать заданной в переменных $\mathbf{r}'$ (в формуле (15.1) она была задана в переменных $\mathbf{r}$). Переход от одних переменных к другим осуществляется по формуле

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}', \qquad (15.8)$$

где $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор начала координат системы K' (см. рис. 15.1).

Отметим, что даже если в функцию (15.1) время не входило явно (оно могло входить в силовую функцию U), то в функцию (15.7) время будет входить, так как $\mathbf{w}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ суть, вообще говоря, функции t; кроме того, время войдет явно в слагаемое $U(\mathbf{r}')$ в результате перехода от $\mathbf{r}$ к $\mathbf{r}'$, осуществляемого по формуле (15.8).

Прежде чем приступить к составлению уравнения Лагранжа, заменим второе слагаемое выражения (15.7) в соответствии с формулой (VI. 6). В результате получим

$$L' = m\mathbf{v}'^2/2 + m\omega^2\mathbf{r}'^2/2 - m(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}')^2/2 - \\ - m\mathbf{r}'\mathbf{w}_0(t) + m\mathbf{v}'[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] - U(\mathbf{r}'). \quad (15.9)$$

Воспользовавшись циклической перестановкой сомножителей (см. формулу (VI. 3)), предпоследнее слагаемое, равное $m\mathbf{v}'[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$, можно было бы записать в виде

$$m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]\mathbf{r}'. \quad (15.10)$$

Уравнение Лагранжа в системе K' выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}'} \quad (15.11)$$

(см. формулу (9.3) и подстрочное примечание на стр. 14). Из выражения (15.9) следует, что

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} = m\mathbf{v}' + m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'],$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} = m\dot{\mathbf{v}}' + m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + m[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}'].$$

Напомним, что с тех пор, как мы выразили L в переменных $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{v}'$, мы «живем» в системе отсчета K'. Следовательно, под $\dot{\mathbf{v}}'$ нужно понимать ускорение частицы $\mathbf{w}'$, наблюдаемое в системе K', а под $\dot{\mathbf{r}}'$ — скорость частицы $\mathbf{v}'$ в той же системе. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} = m\mathbf{w}' + m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']. \quad (15.12)$$

Что касается $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, то это есть производная по времени функции $\boldsymbol{\omega}(t)$, которая задана нам в системе K.

При вычислении $\partial L'/\partial \mathbf{r}'$ будем предполагать, что предпоследнее слагаемое в формуле (15.9) представлено в виде (15.10). Тогда получим

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = m\omega^2\mathbf{r}' - m(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}')\boldsymbol{\omega} - m\mathbf{w}_0(t) + m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}] - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'}. \tag{15.13}$$

Первые два слагаемые в этом выражении представляют собой написанное по формуле «бац минус цаб» (см. (VI.5)) двойное векторное произведение $m[\boldsymbol{\omega}, [\mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}]]$. Следовательно, выражение (15.13) можно записать в виде

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = m[\boldsymbol{\omega}, [\mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}]] - m\mathbf{w}_0(t) + m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}] - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'}. \tag{15.14}$$

Подставив выражения (15.12) и (15.14) в формулу (15.11) и произведя преобразования, придем к уравнению движения частицы в системе K':

$$m\mathbf{w}' = -\partial U/\partial \mathbf{r}' - m\mathbf{w}_0(t) + m[\mathbf{r}'\dot{\boldsymbol{\omega}}] + m[\boldsymbol{\omega}[\mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}]] + 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]. \tag{15.15}$$

Мы видим, что ускорение частицы в системе K' определяется, кроме обусловленной силовым полем силы $-\partial U/\partial \mathbf{r}'$, рядом дополнительных сил, называемых, как известно, *силами инерции*. Слагаемое $m[\boldsymbol{\omega}\,[\mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}]]$ дает *центробежную силу* инерции, а слагаемое $2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$ — *кориолисову силу*. Сила $m[\mathbf{r}'\dot{\boldsymbol{\omega}}]$ связана с неравномерностью вращения; она специального названия не имеет.

Если система K' движется относительно системы K поступательно (в этом случае $\boldsymbol{\omega} = 0$, а значит, и $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$), в уравнение движения входит только одна сила инерции, равная

$$\mathbf{f}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{п}} = -m\mathbf{w}_0(t). \tag{15.16}$$

Замечательно то, что эта сила, как и сила тяжести $m\mathbf{g}$, пропорциональна массе частицы. Это обстоятельство лежит в основе общей теории относительности.

В случае равномерно вращающейся системы координат, не имеющей поступательного ускорения ($\mathbf{w}_0(t) = 0$, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$), функция Лагранжа имеет вид (см. (15.7))

$$L' = m\mathbf{v}'^2/2 + m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']^2/2 + m\mathbf{v}'[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] - U. \tag{15.17}$$

Найдем импульс, момент импульса и энергию частицы для этого случая. В соответствии с формулой (9.5)

$$\mathbf{p}' = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'}.$$

Взяв производную от функции (15.17), получим

$$\mathbf{p}' = m\mathbf{v}' + m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] = m\{\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']\}. \qquad (15.18)$$

Если система K' не имеет не только поступательного ускорения, но и поступательной скорости ($\mathbf{v}_0 = 0$), то, как видно из (15.3), выражение, стоящее в (15.18) в фигурных скобках, есть скорость частицы $\mathbf{v}$ относительно инерциальной системы K. Таким образом, $\mathbf{p}'$ оказывается равным $m\mathbf{v}$, т. е. совпадает с импульсом $\mathbf{p}$ частицы в инерциальной системе:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}. \qquad (15.19)$$

Далее, если начала систем K и K' совпадают (см. рис. 15.1), то совпадают и радиусы-векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Отсюда с учетом (15.19) вытекает, что момент импульса $\mathbf{M}' = [\mathbf{r}'\mathbf{p}']$ в системе K' совпадает с моментом импульса $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ в системе K:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}. \qquad (15.20)$$

В соответствии с формулой (5.1) энергия частицы в системе K' определяется выражением

$$E' = \sum_i \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_i} \dot{x}'_i - L',$$

где x'_i — координаты (декартовы) частицы в системе K'. Согласно (4.17) $\partial L'/\partial \dot{x}'_i$ есть p'_i — проекция импульса частицы $\mathbf{p}'$ на i-ю координатную ось; $\dot{x}'_i$ — проекция на ту же ось скорости частицы $\mathbf{v}'$. Следовательно, выражение для энергии можно записать в виде

$$E' = \mathbf{p}'\mathbf{v}' - L'. \qquad (15.21)$$

Подставив сюда значение (15.18) для $\mathbf{p}'$ и выражение (15.17) для L', получим следующую формулу:

$$E' = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} + U - \frac{m}{2}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']^2. \qquad (15.22)$$

Вращение системы отсчета проявилось в появлении в выражении для энергии дополнительного, не зави-

сящего от скорости частицы v', слагаемого

$$U_{\text{цб}} = -\frac{m}{2}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']^2. \qquad (15.23)$$

Эту дополнительную «потенциальную» энергию называют центробежной.

Заменим в формуле (15.22) $\mathbf{v}'$ через $\mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$ (см. (15.3); полагаем $\mathbf{v}_0(t) = 0$). В результате получим

$$E' = m\mathbf{v}^2/2 + U - m\mathbf{v}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']. \qquad (15.24)$$

Первые два слагаемые дают энергию частицы E в системе K. Если начала систем K и K' совпадают, $\mathbf{r}'$ можно заменить через $\mathbf{r}$. Тогда последний член в (15.24) с помощью циклической перестановки можно привести к виду

$$m\mathbf{v}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = \boldsymbol{\omega}[\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = \boldsymbol{\omega}\mathbf{M}.$$

Таким образом, между энергиями частицы E (в системе K) и E' (в системе K') имеется соотношение

$$E' = E - \boldsymbol{\omega}\mathbf{M}. \qquad (15.25)$$

Напомним, что эта формула получена в предположении, что начала обеих систем отсчета совпадают. Следовательно, вместо $\mathbf{M}$ в формуле (15.25) можно писать $\mathbf{M}'$ (см. (15.20)).

Итак, если система отсчета K' равномерно вращается относительно инерциальной системы K и начала обеих систем совмещены, то импульс и момент импульса частицы в обеих системах совпадают, а энергия частицы в системе K' меньше энергии в системе K на величину скалярного произведения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{M}$.

Глава IV

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 16. Свободные колебания системы без трения

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, в которой отсутствуют силы трения. Потенциальная энергия такой системы имеет вид $U=U(q)$, где q — обобщенная координата. Известно, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия имеет минимум. Будем отсчитывать q от этого положения. Разложим функцию $U(q)$ в ряд по степеням q в малой окрестности точки $q=0$. Ввиду малости q ограничимся первыми членами разложения:

$$U(q)=U(0)+U'(0)\,q+{}^1/_2U''(0)\,q^2.$$

Из условия равновесия $U'(0)=0$. Условимся отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия, т. е. положим $U(0)=0$. Наконец, введем обозначение: $U''(0)=\varkappa$ (напомним, что в точке минимума вторая производная положительна; следовательно, $\varkappa>0$). В итоге придем к выражению

$$U(q)=\frac{\varkappa q^2}{2}. \tag{16.1}$$

Будем считать связи стационарными. Тогда согласно (5.7)

$$T=\gamma(q)\,\dot{q}^2.$$

При прохождении через положение равновесия T не обращается в нуль. Следовательно, $\gamma(0)$ отлична от нуля. Разложив $\gamma(q)$ в ряд и сохранив ввиду малости q только нулевой член разложения, можно написать

$$T=\frac{\mu\dot{q}^2}{2}, \tag{16.2}$$

где $\mu=2\gamma(0)$ (не путать с приведенной массой!).

Составим функцию Лагранжа:

$$L = \frac{\mu \dot{q}^2}{2} - \frac{\varkappa q^2}{2}. \tag{16.3}$$

Уравнение Лагранжа:

$$\mu \ddot{q} + \varkappa q = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{16.4}$$

$(\omega_0^2 = (\varkappa/\mu) > 0)$ представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (см. Приложение V). Применив подстановку $q = \exp(\lambda t)$, придем к характеристическому уравнению[1])

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Корни этого уравнения равны $\lambda_1 = +i\omega_0$, $\lambda_2 = -i\omega_0$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$q = C_1 \exp(i\omega_0 t) + C_2 \exp(-i\omega_0 t), \tag{16.5}$$

где C_1 и C_2 — комплексные постоянные величины.

Значения q должны быть вещественными; это значит, что должно выполняться условие $q^* = q$ (q^* — величина, комплексно-сопряженная с q). Подставив в это условие выражение (16.5) для q, получим

$$C_1^* \exp(-i\omega_0 t) + C_2^* \exp(i\omega_0 t) = \\ = C_1 \exp(i\omega_0 t) + C_2 \exp(-i\omega_0 t).$$

Полученное соотношение выполняется, если $C_1 = C_2^*$ (соответственно $C_1^* = C_2$). Учтя это, представим коэффициенты C_1 и C_2 в виде

$$C_1 = (a/2)\exp(i\alpha), \quad C_2 = (a/2)\exp(-i\alpha) \tag{16.6}$$

(a и α — произвольные вещественные постоянные). Подстановка этих значений в формулу (16.5) дает

$$q = \frac{a}{2}\{\exp(i(\omega_0 t + \alpha)) + \exp(-i(\omega_0 t + \alpha))\} = \\ = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{16.7}$$

Итак, свободное движение системы вблизи положения устойчивого равновесия носит характер гармонического колебания (разумеется, при условии, что в процессе движения q остается малой).

---

[1]) См. формулы (V.7) и (V.9).

Из общего курса физики известно, что a называется амплитудой, α — начальной фазой колебания; ω_0 — собственная частота системы[1]).

Преобразуем выражение (16.7) по формуле для косинуса суммы:

$$q = a(\cos\alpha\cos\omega_0 t - \sin\alpha\sin\omega_0 t)$$

и введем обозначения

$$c_1 = a\cos\alpha, \quad c_2 = -a\sin\alpha.$$

Тогда решение уравнения (16.4) можно представить в виде

$$q = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t, \tag{16.8}$$

где c_1 и c_2 — вещественные постоянные, значения которых определяются из начальных условий (из q_0 и $(\dot{q})_0$).

Наконец, приведем еще одну форму записи гармонического колебания[2]):

$$q = \mathrm{Re}\{\hat{q}\} = \mathrm{Re}\{\hat{A}\exp(i\omega_0 t)\}, \tag{16.9}$$

где

$$\hat{A} = a\exp(i\alpha) \tag{16.10}$$

— так называемая комплексная амплитуда; ее модуль равен обычной амплитуде, а аргумент — начальной фазе колебания. Подставив в (16.9) значение (16.10) и взяв вещественную часть получившегося выражения, придем к формуле (16.7).

Итак, гармоническое колебание может быть представлено в виде любой из трех формул: (16.7), (16.8), (16.9).

§ 17. Затухающие колебания

Во всякой реальной колебательной системе действуют силы, тормозящие движение системы и приводящие к постепенному уменьшению размахов (затуханию) колебаний. Механическая энергия системы при

---

[1]) Как правило, мы не будем приводить тех сведений по рассматриваемому вопросу, которые могут быть найдены в учебниках общей физики.

[2]) Крышечкой над буквой мы будем обозначать комплексные величины.

этом переходит во внутреннюю энергию системы и окружающей среды (обычно кратко, но не вполне строго говорят, что энергия переходит в тепло). Такой процесс называют диссипацией энергии.

Мы ограничимся рассмотрением случаев, когда тормозящая движение системы обобщенная сила трения пропорциональна обобщенной скорости системы:

$$Q^* = -r\dot{q}.$$

Эта сила непотенциальна, поэтому уравнение Лагранжа будет иметь вид (4.15), причем в качестве L нужно взять функцию (16.3). Итак, затухающие колебания описываются уравнением

$$\mu\ddot{q} + \varkappa q = -r\dot{q}$$

(смысл величин μ и $\varkappa$ тот же, что и в предыдущем параграфе). Представим это уравнение в виде

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \qquad (17.1)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{\varkappa}{\mu} > 0, \quad 2\beta = \frac{r}{\mu}.$$

Подстановка $q = \exp(\lambda t)$ приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \qquad (17.2)$$

При условии, что $\beta^2 < \omega_0^2$, корни характеристического уравнения оказываются комплексными:

$$\lambda_1 = -\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \lambda_2 = -\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Общее решение уравнения (17.1) имеет вид

$$q = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = \\ = \exp(-\beta t)\{C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t)\},$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Найденное нами решение отличается от функции (16.5) множителем $\exp(-\beta t)$ и заменой ω_0 на ω. Требование вещественности q приводит к условию $C_1 = C_2^*$. Введя обозначения (16.6) и произведя элементарные преобразования, придем к известному из общего курса физики выражению для

затухающих колебаний:

$$q = a \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \alpha). \qquad (17.3)$$

В случае, когда $\beta^2 > \omega_0^2$, корни характеристического уравнения (17.2) оказываются вещественными:

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\alpha_1,$$

$$\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\alpha_2$$

(поскольку $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta$, величина α_1 положительна; величина α_2 также положительна, причем $\alpha_2 > \alpha_1$).

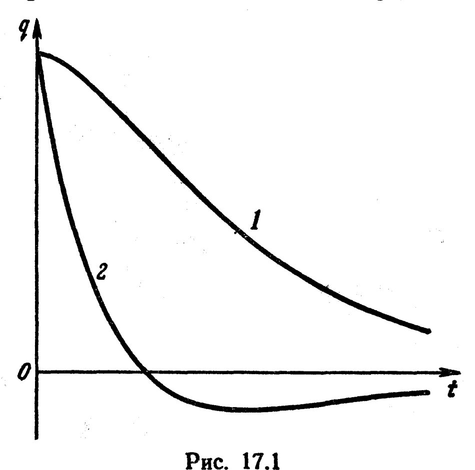


Рис. 17.1

Решение в этом случае имеет вид

$$q = C_1 \exp(-\alpha_1 t) + C_2 \exp(-\alpha_2 t), \qquad (17.4)$$

где C_1 и C_2 — вещественные постоянные.

Итак, при сильном трении (при $\beta^2 > \omega_0^2$) колебания не возникают — выведенная из положения равновесия система возвращается в это положение асимптотически. Оказывается, что движение системы может иметь характер, описываемый либо кривой *1*, либо кривой *2* (рис. 17.1). В последнем случае система вначале проходит через положение равновесия, отклоняется в другую сторону и только потом приближается асимптотически к положению равновесия.

Такое движение системы называется *апериодическим*[1]) *затуханием* (или *апериодическим процессом*).

Как будет происходить возвращение системы в положение равновесия (в соответствии с кривой *1* или с кривой *2*), зависит от соотношения коэффициентов C_1 и C_2, которое в свою очередь определяется начальными условиями (т. е. значениями обобщенной координаты q_0 и обобщенной скорости $v_0 = (\dot{q})_0$ в начальный момент времени).

Выясним условия, при которых апериодическое движение имеет тот либо иной характер. Выразим коэффициенты C_1 и C_2 через q_0 и v_0. Положив в (17.4) $t = 0$, получим

$$q_0 = C_1 + C_2. \tag{17.5}$$

Продифференцировав (17.4) по времени и положив в получившемся выражении $t = 0$, найдем, что

$$v_0 = (\dot{q})_0 = -\alpha_1 C_1 - \alpha_2 C_2. \tag{17.6}$$

Из уравнений (17.5) и (17.6) следует, что

$$C_1 = \frac{\alpha_2 q_0 + v_0}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad C_2 = -\frac{\alpha_1 q_0 + v_0}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{17.7}$$

Приравняем выражение (17.4) нулю:

$$C_1 \exp(-\alpha_1 t) + C_2 \exp(-\alpha_2 t) = 0. \tag{17.8}$$

В случае, когда апериодическое затухание происходит в соответствии с кривой *2* (см. рис. 17.1), уравнение (17.8) должно иметь конечное положительное решение. Решив это уравнение относительно t, получим

$$t = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \ln\left(-\frac{C_2}{C_1}\right) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \ln \frac{\alpha_1 q_0 + v_0}{\alpha_2 q_0 + v_0}$$

(мы подставили значения (17.7) для C_1 и C_2). Разность $\alpha_2 - \alpha_1$ больше нуля (см. выше). Поэтому t будет положительным, когда выражение, стоящее под знаком логарифма, больше $+1$. Последнее условие соблюдается, если выражения $(\alpha_1 q_0 + v_0)$ и $(\alpha_2 q_0 + v_0)$ имеют одинаковые знаки и, кроме того, модуль первого выражения больше чем модуль второго[2])

$$\begin{gathered} \operatorname{sign}(\alpha_1 q_0 + v_0) = \operatorname{sign}(\alpha_2 q_0 + v_0)^{2)}, \\ |\alpha_1 q_0 + v_0| > |\alpha_2 q_0 + v_0|. \end{gathered} \tag{17.9}$$

[1]) То есть непериодическим.

[2]) Символ sign означает «знак».

Коэффициенты α_1 и α_2 положительны, причем $\alpha_2 > \alpha_1$. Поэтому для выполнения второго из условий (17.9) необходимо, чтобы q_0 и v_0 имели разные знаки. Это имеет место, если начальная скорость направлена к положению равновесия (когда система отклонена вправо ($q_0 > 0$), скорость направлена влево ($v_0 < 0$) и наоборот). На рис. 17.2 показаны графики функций $y = \alpha_1 q_0 + v_0$ и $y = \alpha_2 q_0 + v_0$. Графики построены для $q_0 > 0$, поэтому $v_0 < 0$. Значения, пробегаемые q_0, подразделены на три области. Легко видеть, что оба условия (17.9) выполняются лишь в области *I*, т. е. при q_0, не превышающих $-v_0/\alpha_2$. В области *II* не соблюдается первое из условий, в области *III* не соблюдается второе условие.

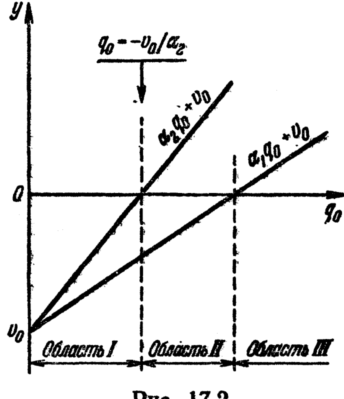


Рис. 17.2

Таким образом, апериодическое затухание происходит в соответствии с кривой *2* (рис. 17.1) в тех случаях, когда v_0 и q_0 имеют разные знаки и, кроме того,

$$|q_0| < \frac{|v_0|}{\alpha_2} \quad \text{или} \quad |v_0| > \alpha_2 |q_0| \qquad (17.10)$$

(напомним, что $\alpha_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$).

Следует особо рассмотреть случай, когда характеристическое уравнение (17.2) имеет кратные корни. Это происходит при условии, что $\beta^2 = \omega_0^2$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$. Согласно формуле (V. 11) общее решение уравнения (17.1) имеет в этом случае вид

$$q = C_1 \exp(-\beta t) + C_2 t \exp(-\beta t) = (C_1 + C_2 t) \exp(-\beta t).$$

Проделав соответствующие выкладки, найдем, что

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \beta q_0 + v_0.$$

Из условия $q = 0$ получается (кроме $t = \infty$) значение

$$t = -\frac{C_1}{C_2} = -\frac{q_0}{\beta q_0 + v_0}.$$

Это значение будет положительным, если

$$\frac{q_0}{\beta q_0 + v_0} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{\beta q_0}{\beta q_0 + v_0} < 0$$

(умножение на β не изменяет знака величины, так как $\beta > 0$). Последнее условие выполняется, когда знак v_0 противоположен знаку q_0 и, кроме того,

$$|v_0| > \beta |q_0|. \tag{17.11}$$

Таким образом, и в случае кратных корней апериодическое затухание может происходить как монотонно (кривая *1* на рис. 17.1), так и с прохождением через положение равновесия (кривая *2* на рис. 17.1). Последний случай имеет место, если выведенная из положения равновесия на q_0 система получает толчок к положению равновесия, сообщающий ей достаточно большую начальную скорость (скорость, удовлетворяющую условию (17.11)[1])).

§ 18. Вынужденные колебания

Пусть на систему, рассмотренную в предыдущем параграфе, действует периодически изменяющаяся внешняя обобщенная сила

$$Q^* = Q_0 \cos(\omega t + \alpha), \tag{18.1}$$

которую мы будем для краткости называть вынуждающей силой. Тогда уравнение Лагранжа (4.15) выглядит следующим образом:

$$\mu\ddot{q} + \varkappa q = -r\dot{q} + Q_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Преобразуем его к виду

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cos(\omega t + \alpha), \tag{18.2}$$

где $f_0 = Q_0/\mu$, смысл остальных величин известен из предыдущих параграфов.

Мы пришли к линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Согласно теореме (V.6) его общее решение можно получить, прибавив к общему решению соответствующего однородного уравнения, т. е. к функции

---

[1]) В случае разных корней скорость должна удовлетворять условию (17.10).

(17.3), какое-либо частное решение уравнения (18.2). Для нахождения частного решения поступим в соответствии со сказанным в конце Приложения V, а именно: прибавим к правой части (18.2) мнимую функцию $if_0 \sin(\omega t + \alpha)$ и будем искать комплексное решение $\hat{q}$ получившегося уравнения; найдя $\hat{q}$, возьмем от него вещественную часть; она и будет представлять собой решение уравнения (18.2). Итак, будем решать уравнение

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 [\cos(\omega t + \alpha) + i \sin(\omega t + \alpha)].$$

Его правую часть можно представить в виде

$$f_0 \exp\{i(\omega t + \alpha)\} = \hat{f}_0 \exp(i\omega t),$$

где

$$\hat{f}_0 = f_0 \exp(i\alpha), \tag{18.3}$$

— комплексная амплитуда [1]) вынуждающей силы (точнее, силы, деленной на μ, но мы для краткости будем называть Q^*/μ просто силой). Напишем дифференциальное уравнение в новых обозначениях:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \hat{f}_0 \exp(i\omega t) \tag{18.4}$$

(чтобы не усложнять обозначений, мы опустили крышечку над q).

Будем искать решение уравнения (18.4) в виде

$$q = \hat{a} \exp(i\omega t), \tag{18.5}$$

где $\hat{a}$ — комплексная амплитуда колебания. Дифференцируя по t, найдем

$$\begin{aligned} \dot{q} &= i\omega\hat{a} \exp(i\omega t), \\ \ddot{q} &= (i\omega)^2 \hat{a} \exp(i\omega t) = -\omega^2 \hat{a} \exp(i\omega t). \end{aligned} \tag{18.6}$$

Мы видим, что при комплексной записи гармонически изменяющихся величин дифференцирование по времени сводится к умножению величины на $i\omega$ (при интегрировании — к делению на $i\omega$).

Подставив в уравнение (18.4) выражения (18.5) и (18.6) и сократив на общий множитель $\exp(i\omega t)$, придем к уравнению

$$-\omega^2\hat{a} + 2i\beta\omega\hat{a} + \omega_0^2\hat{a} = \hat{f}_0,$$

---

[1]) Ср. с (16.10).

из которого находим

$$\hat{a}=\frac{\hat{f}_0}{(\omega_0^2-\omega^2)+2i\beta\omega}.$$

Представим комплексное число, стоящее в знаменателе, в виде

$$(\omega_0^2-\omega^2)+2i\beta\omega=\rho\exp(i\varphi), \qquad (18.7)$$

где ρ — модуль, а φ — аргумент этого числа. Тогда

$$\hat{a}=\frac{\hat{f}_0}{\rho\exp(i\varphi)}=\frac{1}{\rho}\exp(-i\varphi)\hat{f}_0. \qquad (18.8)$$

Из соотношения (18.7) вытекает[1]), что

$$\rho=\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \qquad (18.9)$$

Подставив в (18.8) значения ρ и $\hat{f}_0$ (см. (18.3)), получим для комплексной амплитуды колебания следующее выражение:

$$\hat{a}=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\exp\{i(\alpha-\varphi)\}=a\exp\{i(\alpha-\varphi)\}.$$

Наконец, подставив значение $\hat{a}$ в формулу (18.5), найдем комплексное выражение для q:

$$\hat{q}=a\exp\{i(\omega t+\alpha-\varphi)\}.$$

Его вещественная часть совпадает с известным из общего курса физики выражением установившихся вынужденных колебаний:

$$q=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t+\alpha-\varphi) \qquad (18.10)$$

(в учебниках общей физики обычно полагают $\alpha=0$).

Общее решение уравнения (18.2) получим, сложив функции (17.3) и (18.10). Анализом этого решения и

---

[1]) Напомним, что комплексное число может быть изображено точкой P на плоскости; абсцисса этой точки x равна вещественной части числа, ордината y — мнимой части. Модуль комплексного числа равен модулю ρ радиуса-вектора точки P, а аргумент φ есть угол, образуемый радиусом-вектором с осью абсцисс. Отсюда следует, что $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=y/x$.

рассмотрением явления резонанса мы заниматься не станем, поскольку это делается достаточно подробно в курсах общей физики.

§ 19. Колебания системы со многими степенями свободы [1])

Рассмотрим консервативную систему с s степенями свободы, обладающую положением устойчивого равновесия. В этом положении потенциальная энергия системы $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ имеет минимум. Обобщенные координаты q_i будем отсчитывать от положения равновесия. Имея в виду, что мы ограничимся рассмотрением малых колебаний, разложим потенциальную энергию в ряд по степеням q_i, причем пренебрежем членами более высоких порядков малости:

$$U = U_0 + \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_0 q_i q_k.$$

В положении равновесия все обобщенные силы $Q_i^* = -\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0$ равны нулю. Энергию U_0 также положим равной нулю. С учетом сказанного выражение для потенциальной энергии можно представить в виде

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \varkappa_{ik} q_i q_k, \tag{19.1}$$

где

$$\varkappa_{ik} = \varkappa_{ki} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_0$$

суть положительные величины (в минимуме вторые производные больше нуля). Поскольку U отсчитывается от минимального значения, принятого за нуль, квадратичная форма (19.1) положительно-определенная.

В случае стационарных связей кинетическая энергия определяется положительно определенной квадратичной формой переменных $\dot{q}_i$ (см. (5.10)):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \mu_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \tag{19.2}$$

---

[1]) Прежде чем приступить к чтению этого параграфа, следует ознакомиться с Приложениями VII, VIII и IX.

где

$$\mu_{ik} = \gamma_{ik}(0)$$

суть нулевые члены разложения коэффициентов $\gamma_{ik}(q)$. Согласно формуле (5.8) $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$, следовательно, $\mu_{ik} = \mu_{ki}$.

Вычтя из (19.2) выражение (19.1), получим функцию Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \mu_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k} \varkappa_{ik}q_iq_k. \qquad (19.3)$$

Чтобы найти производные L по q_i и $\dot{q}_i$, напишем выражение полного дифференциала функции (19.3):

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \mu_{ik}\dot{q}_i\,d\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \mu_{ik}\dot{q}_k\,d\dot{q}_i - \frac{1}{2}\sum_{i,k} \varkappa_{ik}q_i\,dq_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k} \varkappa_{ik}q_k\,dq_i.$$

Индексы i и k являются немыми, поэтому каждый из них можно обозначить любой буквой. Воспользовавшись этим, поменяем местами индексы i и k в первой и третьей суммах:

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \mu_{ki}\dot{q}_k\,d\dot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \mu_{ik}\dot{q}_k\,d\dot{q}_i - \frac{1}{2}\sum_{i,k} \varkappa_{ki}q_k\,dq_i - \frac{1}{2}\sum_{i,k} \varkappa_{ik}q_k\,dq_i = \sum_{i,k} \mu_{ik}\dot{q}_k\,d\dot{q}_i - \sum_{i,k} \varkappa_{ik}q_k\,dq_i$$

(напомним, что $\mu_{ki} = \mu_{ik}$, $\varkappa_{ki} = \varkappa_{ik}$). Полученное нами выражение можно представить в виде

$$dL = \sum_i d\dot{q}_i\Big(\sum_k \mu_{ik}\dot{q}_k\Big) - \sum_i dq_i\Big(\sum_k \varkappa_{ik}q_k\Big). \qquad (19.4)$$

В выражении полного дифференциала функции нескольких переменных множитель при дифференциале какой-либо переменной равен частной производной функции по этой переменной. Следовательно, из (19.4) вытекает, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k \mu_{ik}\dot{q}_k, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\sum_k \varkappa_{ik}q_k.$$

Поскольку величины μ_{ik} суть константы, производная $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k \mu_{ik}\ddot{q}_k$. Поэтому уравнения Лагранжа выглядят так:

$$\sum_k \mu_{ik}\ddot{q}_k + \sum_k \varkappa_{ik}q_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \qquad (19.5)$$

(ср. с уравнением (16.4) для одной переменной).

Мы пришли к системе линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Попробуем искать неизвестные функции $q_k(t)$ в виде (ср. с (16.5))

$$q_k = C_k \exp(i\omega t), \qquad (19.6)$$

где C_k — комплексные постоянные, которые требуется определить. Функции (19.6) комплексные, обобщенные же координаты являются вещественными. Поэтому, завершив вычисления, нужно будет взять вещественные части функций (19.6) (см. Приложение V).

Подстановка выражений (19.6) в уравнения (19.5) дает

$$\sum_k \mu_{ik}(-\omega^2) C_k \exp(i\omega t) + \sum_k \varkappa_{ik} C_k \exp(i\omega t) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s).$$

Сократив все уравнения на $\exp(i\omega t)$, получим

$$\sum_k (\varkappa_{ik} - \omega^2\mu_{ik}) C_k = 0. \qquad (19.7)$$

Мы пришли к системе s линейных однородных алгебраических уравнений с неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_s$. Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} \varkappa_{11} - \omega^2\mu_{11} & \varkappa_{12} - \omega^2\mu_{12} \ldots \varkappa_{1s} - \omega^2\mu_{1s} \\ \varkappa_{21} - \omega^2\mu_{21} & \varkappa_{22} - \omega^2\mu_{22} \ldots \varkappa_{2s} - \omega^2\mu_{2s} \\ \ldots & \ldots \\ \varkappa_{s1} - \omega^2\mu_{s1} & \varkappa_{s2} - \omega^2\mu_{s2} \ldots \varkappa_{ss} - \omega^2\mu_{ss} \end{vmatrix} = 0 \qquad (19.8)$$

(см. Приложение VIII, текст, следующий за формулой (VIII. 26)).

Уравнение (19.8) называется *характеристическим*. Оно представляет собой уравнение s-й степени отно-

сительно ω^2. В общем случае это уравнение имеет s различных[1]) вещественных положительных корней: $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_s^2$. Найденные таким способом величины ω_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ называются *собственными частотами* системы.

Докажем вещественность и положительность корней уравнения (19.8). С этой целью умножим каждое из уравнений (19.7) на C_i^* (т. е. на величину, комплексно-сопряженную коэффициенту C_i), а затем сложим вместе все уравнения. В результате получим, что

$$\sum_{i,k} (\varkappa_{ik} - \omega^2 \mu_{ik}) C_i^* C_k = 0$$

или

$$\sum_{i,k} \varkappa_{ik} C_i^* C_k - \omega^2 \sum_{i,k} \mu_{ik} C_i^* C_k = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\sum\limits_{i,k} \varkappa_{ik} C_i^* C_k}{\sum\limits_{i,k} \mu_{ik} C_i^* C_k}. \qquad (19.9)$$

В числителе и знаменателе найденного нами выражения стоят квадратичные формы вида (IX.21). Как показано в Приложении IX, такая форма равна сумме квадратичных форм $\sum\limits_{i,k} \varkappa_{ik} a_i a_k + \sum\limits_{i,k} \varkappa_{ik} b_i b_k$ соответственно $\sum\limits_{i,k} \mu_{ik} a_i a_k + \sum\limits_{i,k} \mu_{ik} b_i b_k$ (a_i — вещественная часть C_i, b_i — мнимая часть C_i). Последние же формы, во-первых, очевидно, вещественны и, во-вторых, положительно определенные (см. (19.1) и (19.2)). Таким образом, мы доказали, что числитель и знаменатель выражения (19.9), а следовательно, и ω^2 вещественны и положительны.

Итак, решив характеристическое уравнение (19.8), мы найдем s собственных частот системы: $\omega_1, \omega_2, \ldots$ $\ldots, \omega_s$. Подставляя поочередно значения ω_α^2 в систему уравнений (19.7) и решая эту систему, найдем C_k, отвечающие различным ω_α. Если ранг матрицы системы (19.7) будет равен $s - 1$ (что обычно имеет ме-

---

[1]) В частных случаях могут получиться кратные корни.

сто), то согласно (VIII. 28) решения системы имеют вид

$$C_k^{(\alpha)} = c_\alpha A_{mk}^{(\alpha)},$$

где c_α — произвольная комплексная постоянная, $A_{mk}^{(\alpha)}$ — алгебраическое дополнение элемента $\varkappa_{mk} - \omega_\alpha^2 \mu_{mk}$ в определителе системы (m выбирается произвольно, но так, чтобы хотя бы одно $A_{mk}^{(\alpha)}$ было отлично от нуля). Поскольку все элементы этого определителя вещественны, величины $A_{mk}^{(\alpha)}$ также будут вещественными.

Таким образом, для каждой обобщенной координаты q_k получается s различных решений вида

$$q_k = c_\alpha A_{mk}^{(\alpha)} \exp(i\omega_\alpha t) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, s), \qquad (19.10)$$

где $A_{mk}^{(\alpha)}$ — вещественные постоянные, определяемые значениями коэффициентов $\varkappa_{ik}$ и μ_{ik}, а также частот ω_α.

Общее решение получим, сложив все выражения (19.10):

$$q_k = \sum_\alpha c_\alpha A_{mk}^{(\alpha)} \exp(i\omega_\alpha t).$$

Перейдя к вещественной части этого выражения, получим

$$q_k = \operatorname{Re}\left\{\sum_\alpha c_\alpha A_{mk}^{(\alpha)} \exp(i\omega_\alpha t)\right\} = \sum_\alpha A_{mk}^{(\alpha)} \operatorname{Re}\{c_\alpha \exp(i\omega_\alpha t)\}.$$

Наконец, представив c_α в виде $a_\alpha \exp(i\delta_\alpha)$ (a_α — модуль c_α, т. е. вещественная положительная величина), придем к выражению

$$q_k = \sum_{\alpha=1}^{s} A_{mk}^{(\alpha)} a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \delta_\alpha). \qquad (19.11)$$

Следовательно, изменение каждой обобщенной координаты q_k со временем представляет собой наложение s гармонических колебаний, частоты которых равны собственным частотам системы. Величины a_α и δ_α определяются из начальных условий.

При специальном выборе обобщенных координат выражения (19.11) могут быть сильно упрощены. В Приложении IX показано, что в случае, когда имеются две квадратичные формы — одна от переменных q_k, а вторая от переменных $\dot{q}_k$, причем первая из

них положительно определенная, то существует такое линейное преобразование переменных q_k, которое приводит обе формы к диагональному виду (см. схему (IX. 37)). Перейдем с помощью такого преобразования от переменных q_k к переменным ξ_k. Тогда квадратичные формы (19.1) и (19.2) станут диагональными:

$$T=\frac{1}{2}\sum_k \dot{\xi}_k^2, \quad U=\frac{1}{2}\sum_k \lambda_k\xi_k^2. \qquad (19.12)$$

В новых переменных функция Лагранжа имеет вид

$$L=\frac{1}{2}\sum_k \dot{\xi}_k^2-\frac{1}{2}\sum_k \lambda_k\xi_k^2,$$

а уравнения Лагранжа запишутся следующим образом:

$$\ddot{\xi}_k+\lambda_k\xi_k=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \qquad (19.13)$$

Таким образом, в координатах ξ_k уравнения движения распадаются на s независимых друг от друга уравнений, каждое из которых тождественно уравнению (16.4). Отметим, что в силу положительной определенности квадратичной формы, выражающей потенциальную энергию U, все коэффициенты λ_k положительны. Поэтому их можно представить в виде

$$\lambda_k=\omega_k^2,$$

где ω_k — вещественные величины.

Напишем решения уравнений (19.13):

$$\xi_k=a_k\cos(\omega_k t+\delta_k) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s) \qquad (19.14)$$

(см. формулу (16.7)).

Мы нашли, что обобщенные координаты ξ_k совершают независимо друг от друга простое гармоническое колебание, каждая со своей частотой ω_k. Определенные так обобщенные координаты называются *нормальными* (или *главными*), а совершаемые ими простые гармонические колебания — *нормальными колебаниями* системы.

Отметим, что нормальные координаты ξ_k связаны с произвольными обобщенными координатами q_k с по-

мощью линейных преобразований, т. е. преобразований вида

$$\xi_k = \sum_i b_{ki} q_i. \qquad (19.15)$$

Следовательно, ξ_k можно получить как линейную комбинацию координат q_i.

§ 20. Связанные маятники

Рассмотрим малые колебания системы из двух одинаковых математических маятников, связанных невесомой пружиной (рис. 20.1). Предположим, что маятники могут совершать колебания только в плоскости чертежа, так что система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем φ_1 и φ_2 — углы отклонения маятников от вертикального направления. Длина каждого из маятников равна l, масса m. Концы пружины закреплены на стержнях маятников на расстоянии b от точки подвеса. Пружина подобрана так, что при $\varphi_1 = \varphi_2$ ее натяжение равно нулю.

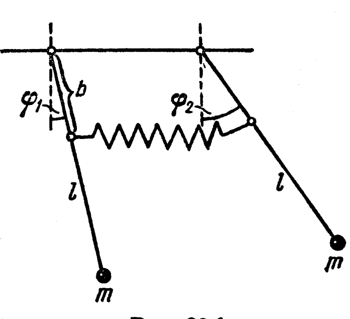


Рис. 20.1

Напишем выражение для потенциальной энергии системы U, полагая U в положении равновесия равной нулю:

$$U = mgl(1 - \cos\varphi_1) + mgl(1 - \cos\varphi_2) + {}^1/_2 k(b\sin\varphi_2 - b\sin\varphi_1)^2.$$

При малых колебаниях можно положить $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \varphi^2} = 1 - {}^1/_2\varphi^2$. Поэтому выражение для U примет вид

$$U = {}^1/_2 mgl\varphi_1^2 + {}^1/_2 mgl\varphi_2^2 + {}^1/_2 kb^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 = {}^1/_2 \left[(mgl + kb^2)\varphi_1^2 - kb^2\varphi_1\varphi_2 - kb^2\varphi_2\varphi_1 + (mgl + kb^2)\varphi_2^2\right]. \qquad (20.1)$$

Кинетическая энергия в том же приближении равна

$$T = {}^1/_2 \left[ml^2\dot{\varphi}_1^2 + ml^2\dot{\varphi}_2^2\right]. \tag{20.2}$$

Сравнение выражений (20.1) и (20.2) с выражениями (19.1) и (19.2) дает для коэффициентов $\varkappa_{ik}$ и μ_{ik} следующие значения:

$$\begin{gathered} \varkappa_{11} = \varkappa_{22} = mgl + kb^2, \quad \varkappa_{12} = \varkappa_{21} = -kb^2, \\ \mu_{11} = \mu_{22} = ml^2, \quad \mu_{12} = \mu_{21} = 0. \end{gathered} \tag{20.3}$$

Подстановка этих значений коэффициентов в уравнения (19.5) приводит к дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered} ml^2\ddot{\varphi}_1 + (mgl + kb^2)\varphi_1 - kb^2\varphi_2 = 0, \\ ml^2\ddot{\varphi}_2 - kb^2\varphi_1 + (mgl + kb^2)\varphi_2 = 0. \end{gathered} \tag{20.4}$$

Будем искать решения этих уравнений в виде

$$\varphi_1 = C_1 \exp(i\omega t), \quad \varphi_2 = C_2 \exp(i\omega t). \tag{20.5}$$

Подставим эти выражения в уравнения (20.4). После сокращения на $e^{i\omega t}$ и приведения подобных членов, получим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{gathered} (mgl + kb^2 - ml^2\omega^2)C_1 - kb^2C_2 = 0, \\ -kb^2C_1 + (mgl + kb^2 - ml^2\omega^2)C_2 = 0. \end{gathered} \tag{20.6}$$

Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо равенство нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} mgl + kb^2 - ml^2\omega^2 & -kb^2 \\ -kb^2 & mgl + kb^2 - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. должно выполняться условие

$$(mgl + kb^2 - ml^2\omega^2)^2 - (-kb^2)^2 = 0.$$

Последнее уравнение после несложных преобразований можно привести к виду

$$(\omega^2)^2 - 2\left[g/l + (k/m)(b^2/l^2)\right]\omega^2 + \\ + \left[g^2/l^2 + 2(g/l)(k/m)(b^2/l^2)\right] = 0.$$

Мы пришли к квадратному уравнению относительно ω^2. Корни этого уравнения равны

$$\omega_1^2 = g/l, \quad \omega_2^2 = g/l + 2(k/m)(b^2/l^2).$$

Следовательно, собственными частотами системы будут

$$\omega_1 = \sqrt{g/l} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{g/l + 2(k/m)(b^2/l^2)}. \qquad (20.7)$$

Подставим в уравнения (20.6) вместо ω^2 квадрат первой собственной частоты, т. е. ω_1^2. После упрощений система (20.6) принимает вид

$$kb^2C_1 - kb^2C_2 = 0,$$
$$-kb^2C_1 + kb^2C_2 = 0.$$

Решения этой системы очевидны:

$$C_1 = C_2 = c_1 = a_1 \exp(i\delta_1), \qquad (20.8)$$

где c_1 — произвольная комплексная постоянная, a_1 — ее модуль, δ_1 — аргумент.

Подстановка значения (20.8) в (20.5) дает комплексные решения дифференциальных уравнений (20.4), соответствующие частоте ω_1:

$$\varphi_1^{(1)} = c_1 \exp(i\omega_1 t) = a_1 \exp\{i(\omega_1 t + \delta_1)\},$$
$$\varphi_2^{(1)} = c_1 \exp(i\omega_1 t) = a_1 \exp\{i(\omega_1 t + \delta_1)\}.$$

Взяв вещественную часть от найденных нами функций, получим

$$\varphi_1^{(1)} = a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1), \quad \varphi_2^{(1)} = a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1). \qquad (20.9)$$

Теперь подставим в уравнение (20.6) вместо ω^2 квадрат второй собственной частоты, т. е. ω_2^2. В результате получим

$$-kb^2C_1 - kb^2C_2 = 0,$$
$$-kb^2C_1 - kb^2C_2 = 0.$$

Система удовлетворяется значениями

$$C_1 = -C_2 = c_2 = a_2 \exp(i\delta_2).$$

Соответственно функции (20.5) будут равны

$$\varphi_1^{(2)} = c_2 \exp(i\omega_2 t) = a_2 \exp\{i(\omega_2 t + \delta_2)\},$$
$$\varphi_2^{(2)} = -c_2 \exp(i\omega_2 t) = -a_2 \exp\{i(\omega_2 t + \delta_2)\},$$

а их вещественные части

$$\varphi_1^{(2)} = a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2), \quad \varphi_2^{(2)} = -a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2). \qquad (20.10)$$

Общее решение системы (20.4) получим, сложив решения (20.9) и (20.10). Следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)} = a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2),\\ \varphi_2 &= \varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)} = a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2).\end{aligned} \qquad (20.11)$$

Перейдем от обобщенных координат φ_1 и φ_2 к новым переменным ξ_1 и ξ_2, которые определим так:

$$\xi_1 = {}^1/_2 (\varphi_1 + \varphi_2), \quad \xi_2 = {}^1/_2 (\varphi_1 - \varphi_2).$$

С учетом (20.11) получаем

$$\begin{aligned}\xi_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1),\\ \xi_2 &= a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2).\end{aligned} \qquad (20.12)$$

Таким образом, переменные ξ_1 и ξ_2 суть нормальные координаты системы связанных маятников. Обобщенные координаты φ_1 и φ_2 выражаются через ξ_1 и ξ_2 с помощью линейных соотношений

$$\varphi_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad \varphi_2 = \xi_1 - \xi_2. \qquad (20.13)$$

Предположим, что в системе совершается только первое нормальное колебание. Это значит, что $\xi_2 \equiv 0$. Из (20.13) вытекает, что в этом случае

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \xi_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1),$$

т. е. оба маятника колеблются как одно целое с частотой ω_1, будучи в каждый момент времени отклонены в одну и ту же сторону на одинаковый угол (рис. 20.2, *а*). Пружина при этом не деформирована, так что каждый маятник колеблется так, как если бы второго маятника не было ($\omega_1 = \sqrt{g/l}$).

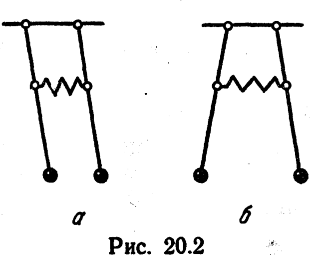


Рис. 20.2

Теперь предположим, что в системе совершается только второе нормальное колебание. Как следует из (20.13), в этом случае

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \xi_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2).$$

В каждый момент времени маятники отклонены на одинаковый по величине угол, но в противоположные стороны (рис. 20.2, *б*).

Связь между маятниками можно охарактеризовать с помощью коэффициента жесткости пружины k. Назовем его *коэффициентом связи*. Рассмотрим случай слабой связи, т. е. малого k. Если $k/m \ll g/l$, разность собственных частот будет много меньше самих частот

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1. \tag{20.14}$$

Отведем первый маятник на угол $\varphi_{10} = \alpha$, второй маятник при этом удержим в нулевом положении. Затем предоставим системе совершать колебания. Очевидно, что начальные условия в этом случае имеют вид

$$\varphi_{10} = \alpha, \quad \varphi_{20} = 0, \quad (\dot{\varphi}_1)_0 = 0, \quad (\dot{\varphi}_2)_0 = 0.$$

Найдем значения постоянных a_1, a_2, δ_1 и δ_2. Для этого положим в (20.11) $t = 0$; в результате получим

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \alpha = a_1 \cos \delta_1 + a_2 \cos \delta_2, \\ \varphi_{20} &= 0 = a_1 \cos \delta_1 - a_2 \cos \delta_2. \end{aligned} \tag{20.15}$$

Теперь продифференцируем выражения (20.11) по времени и положим в получившихся формулах $t = 0$. Это приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} (\dot{\varphi}_1)_0 &= 0 = -a_1\omega_1 \sin \delta_1 - a_2\omega_2 \sin \delta_2, \\ (\dot{\varphi}_2)_0 &= 0 = -a_1\omega_1 \sin \delta_1 + a_2\omega_2 \sin \delta_2. \end{aligned} \tag{20.16}$$

Решив совместно уравнения (20.15) и (20.16), найдем, что

$$a_1 = a_2 = \alpha/2, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае колебания имеют вид

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \alpha \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t,$$

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \alpha \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t.$$

В случае слабой связи $(\omega_2 - \omega_1) \ll (\omega_2 + \omega_1)$ (см. (20.14)). Следовательно, можно считать, что каждый из маятников совершает гармоническое колебание час-

тоты $(\omega_2+\omega_1)/2 \approx \omega_1$ с медленно меняющейся амплитудой. Значит, движение каждого из маятников носит характер биений. Амплитуды изменяются со сдвигом по фазе на $\pi/2$. Когда амплитуда одного из маятников достигает наибольшей величины, амплитуда второго обращается в нуль и наоборот. В процессе колебаний происходит как бы перекачка энергии от одного маятника к другому.

В тех случаях, когда возбуждено только одно нормальное колебание ξ_1 или ξ_2, перехода энергии от одного маятника к другому не происходит.

Глава V

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 21. Кинематика твердого тела

Разбив сплошное твердое тело на элементарные объемы массы ρdV (ρ — плотность тела), его можно представить как систему частиц с жесткими связями.

Твердое тело, как известно, обладает шестью степенями свободы — тремя поступательными и тремя вращательными. Для описания движения твердого тела выберем инерциальную систему отсчета K (с осями X_1, X_2, X_3), которую будем считать неподвижной. С телом свяжем жестко другую систему K' (с осями x_1, x_2, x_3), поместив ее начало в точку A тела. В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, удобно взять три координаты начала системы K' (им отвечает радиус-вектор $\mathbf{R}_A$) и три угла, характеризующих ориентацию осей x_1, x_2, x_3 по отношению к осям X_1, X_2, X_3. Названные оси образуют друг с другом девять углов, однако независимыми оказываются только три из них, остальные шесть могут быть выражены через значения первых трех[1]). Обычно в качестве трех углов, определяющих взаимную ориентацию осей систем K и K', используются так называемые эйлеровы углы φ, ϑ, ψ (см. следующий параграф).

Любое элементарное перемещение твердого тела можно представить как сумму поступательного перемещения, при котором все точки тела смещаются на одинаковый отрезок $d\mathbf{R}_A$, и поворот на угол $d\Phi$ вокруг оси, проходящей через точку A.

---

[1]) Между косинусами этих углов α_{ik} имеются шесть соотношений (см. формулу (VI.39)):

$$\sum_m \alpha_{im}\alpha_{km} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \leqslant k)$$

($\alpha_{ik} = \cos(x_i, X_k)$).

Поскольку скорости точек тела $\mathbf{v}$ в системе K' равны нулю, формула (15.3) для скорости точки, положение которой в системе K' определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}_{(A)}$ [1]), принимает вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + [\boldsymbol{\omega}_{(A)}\mathbf{r}_{(A)}], \tag{21.1}$$

где $\mathbf{V}_A$ — поступательная скорость тела (скорость точки A, наблюдаемая в системе K), $\boldsymbol{\omega}_{(A)} = d\boldsymbol{\Phi}/dt$ — угловая скорость вращения тела вокруг оси, проходящей через точку A. Первое слагаемое в этой формуле одинаково для всех точек тела, второе есть функция точки.

Если бы мы поместили начало системы K' в другую точку тела, скажем, в точку B, формула (21.1) выглядела бы следующим образом:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_B + [\boldsymbol{\omega}_{(B)}\mathbf{r}_{(B)}], \tag{21.2}$$

где $\mathbf{V}_B$ — скорость точки B, наблюдаемая в системе K, $\boldsymbol{\omega}_{(B)}$ — угловая скорость вращения тела вокруг оси, проходящей через точку B.

---

[1]) Условимся об обозначениях. В этой главе мы будем пользоваться индексами двух видов: 1) индексами без скобок и 2) индексами, взятыми в скобки. Индексы без скобок будут служить для указания частицы или точки, к которой относится данная величина. Например, m_α — масса частицы с номером α, $\mathbf{r}_\alpha$ — радиус-вектор той же частицы, $\mathbf{R}_A$ — радиус-вектор точки A.

Индексы в скобках будут указывать точку, из которой проведен радиус-вектор, либо точку, относительно которой берется момент, и т. п. В зависимости от обстоятельств эти индексы мы будем располагать то внизу, то вверху соответствующего символа. Так, например, $\mathbf{r}_{(A)}$ или $\mathbf{r}^{(A)}$ будет обозначать радиус-вектор, проведенный из точки A; $\mathbf{M}_{(A)}$ или $\mathbf{M}^{(A)}$ — момент импульса относительно точки A. Отсутствие при символе $\mathbf{r}$ или $\mathbf{M}$ индекса в скобках будет означать, что соответствующая величина берется относительно центра инерции тела C. Таким образом, радиус-вектор, проведенный из точки C, мы будем обозначать либо символом $\mathbf{r}_{(C)}$, либо просто $\mathbf{r}$, момент относительно точки C — символами $\mathbf{M}_{(C)}$ и $\mathbf{M}$ и т. д.

Символом $\mathbf{R}$ мы будем пользоваться только в одном вполне определенном случае — для обозначения радиуса-вектора, проведенного из начала неподвижной системы координат K (с осями X, Y, Z). Поэтому в данном случае нет надобности в индексе в скобках и мы его писать не будем.

Малыми буквами ($\mathbf{r}$, x, y, z и т. д.) мы будем обозначать радиусы-векторы, проведенные из начала системы координат K', жестко связанной с телом, координаты в системе K' и т. д.

Положение произвольной точки тела в системе K определяется в обоих случаях одним и тем же радиус-вектором:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_A + \mathbf{r}_{(A)} = \mathbf{R}_B + \mathbf{r}_{(B)}.$$

Отсюда следует, что радиус-вектор $\mathbf{r}_{(B)}$ можно представить в виде

$$\mathbf{r}_{(B)} = \mathbf{a} + \mathbf{r}_{(A)}, \qquad (21.3)$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B$ есть радиус-вектор, проведенный из точки B в точку A, т. е. величина, не зависящая от того, для какой из точек тела мы пишем формулу (21.3).

Подставив значение (21.3) в формулу (21.2), получим

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_B + [\boldsymbol{\omega}_{(B)}\mathbf{a}] + [\boldsymbol{\omega}_{(B)}\mathbf{r}_{(A)}]. \qquad (21.4)$$

В этом выражении первые два слагаемые одинаковы для всех точек тела, третье есть функция точки.

Формулы (21.1) и (21.4) определяют одну и ту же величину — скорость рассматриваемой точки тела в системе K. Следовательно, при любом $\mathbf{r}_{(A)}$ правые части этих формул должны совпадать. Это возможно при условии, что

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B + [\boldsymbol{\omega}_{(B)}\mathbf{a}], \qquad (21.5)$$

$$[\boldsymbol{\omega}_{(A)}\mathbf{r}_{(A)}] \equiv [\boldsymbol{\omega}_{(B)}\mathbf{r}_{(A)}] \qquad (21.6)$$

(знак тождества подчеркивает, что равенство должно иметь место при любых $\mathbf{r}_{(A)}$).

Из тождества (21.6) вытекает, что

$$\boldsymbol{\omega}_{(A)} = \boldsymbol{\omega}_{(B)},$$

т. е. что угловая скорость вращения вокруг любой оси одна и та же и можно говорить просто об угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$, безотносительно к выбору системы отсчета K'. Поступательная же скорость, как видно из соотношения (21.5), не имеет абсолютного характера — она зависит от положения начала системы K' ($\mathbf{V}_A \neq \mathbf{V}_B$).

Опустив ненужный индекс при $\boldsymbol{\omega}$, запишем соотношение (21.5) следующим образом:

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A - [\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}]. \qquad (21.7)$$

Возможны два случая: 1) векторы $\mathbf{V}_A$ и $\boldsymbol{\omega}$ взаимно перпендикулярны, 2) векторы $\mathbf{V}_A$ и $\boldsymbol{\omega}$ образуют угол, отличный от $\pi/2$. Легко заметить, что в первом случае векторы $\mathbf{V}_A$ и $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}]$ компланарны. Следовательно, будут компланарными также векторы $\mathbf{V}_B$ и $\mathbf{V}_A$. Значит, вектор $\mathbf{V}_B$, как и вектор $\mathbf{V}_A$, перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{\omega}$. Отсюда можно заключить следующее: если векторы $\mathbf{V}_A$ и $\boldsymbol{\omega}$ взаимно перпендикулярны при каком-то выборе начала системы K', то эти векторы будут взаимно перпендикулярными и при любом другом выборе начала системы K' (при любом другом выборе точки A).

Теперь обратимся к формуле (21.1), записав ее в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_{(A)}]. \qquad (21.8)$$

Из нее следует, что при взаимной перпендикулярности векторов $\mathbf{V}_A$ и $\boldsymbol{\omega}$ (которая, если имеет место, то наблюдается при любом выборе точки A) векторы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_A$ будут компланарными, причем скорости $\mathbf{V}$ всех точек тела лежат в плоскостях, перпендикулярных к вектору $\boldsymbol{\omega}$. Варьируя выбор точки A, можно добиться того, чтобы

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V} - [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_{(A)}] \qquad (21.9)$$

стала равной нулю[1]) (при этом точка A может оказаться вне тела). В итоге движение твердого тела окажется представленным как одно лишь вращение вокруг оси, которую называют мгновенной осью вращения тела (см. (21.8)).

Когда векторы $\mathbf{V}_A$ и $\boldsymbol{\omega}$ не перпендикулярны друг к другу, точку A можно выбрать так, чтобы эти векторы были коллинеарными. В итоге движение тела в каждый момент времени будет наложением двух движений: вращения вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и поступательного движения со скоростью $\mathbf{V}_A$ вдоль той же оси. На доказательстве этого утверждения мы останавливаться не будем.

Отметим, что формулы динамики твердого тела принимают особенно простой вид, если начало систе-

---

[1]) Оба члена в правой части выражения (21.9) являются функциями точки тела ($\mathbf{V}$ — скорость точки тела в системе K, $\mathbf{r}_{(A)}$ — радиус-вектор этой точки в системе K'). Разность же этих членов для всех точек тела одна и та же и равна $\mathbf{V}_A$.

мы K' совместить с центром инерции тела C. В дальнейшем мы обычно будем поступать именно так. Поэтому формулу (21.8) будем писать в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_C + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \qquad (21.10)$$

§ 22. Эйлеровы углы

Эйлеровы углы определяются следующим образом. Пусть первоначально оси связанной с телом системы K' совпадали с осями системы K. Затем тело совершило некоторый поворот, в результате чего ориентация осей K' в пространстве изменилась. Любой такой поворот можно осуществить с помощью трех поворотов, показанных на рис. 22.1.

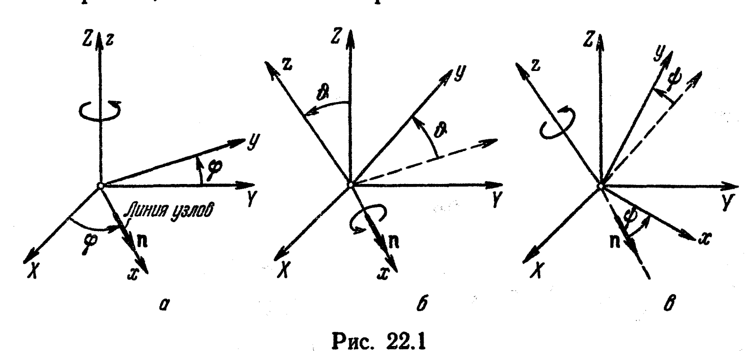


Рис. 22.1

1. Поворота вокруг оси Z на угол φ (рис. 22.1, *а*). Направление $\mathbf{n}$, которое примет при этом ось x, называется *линией узлов*.

2. Поворота вокруг линии узлов на угол ϑ (рис. 22.1, *б*).

3. Поворота вокруг оси z на угол ψ (рис. 22.1, *в*).

Направление каждого из поворотов связано с направлением оси, вокруг которой он осуществляется, правилом правого винта.

Из рис. 22.2 видно, что линия узлов есть не что иное, как линия пересечения координатных плоскостей XY и xy. Угол φ образован осью X и линией узлов, угол ψ — линией узлов и осью x и, наконец, угол ϑ есть угол между осями Z и z. Углы ϑ и φ суть полярные координаты точки пересечения оси z со сферой единичного радиуса. Эту точку называют апексом.

Для того чтобы набор углов φ, ϑ, ψ, определяющий каждый реальный поворот, был однозначным, принимают, что углы φ и ψ могут иметь значения от нуля до 2π, значения же угла ϑ ограничивают интервалом от нуля до π. Если бы углу ϑ также было разрешено иметь значения от 0 до 2π, то, например, изображенный на рис. 22.3 поворот можно было бы охарактеризовать либо набором углов: $\varphi = \pi/2$, $\vartheta = \pi/2$, $\psi = 0$ (верхняя последовательность поворотов; оси X, Y, Z на рисунке не даны, их ориентация совпадает с исходной ориентацией осей x, y, z), либо набором: $\varphi = 3\pi/2$, $\vartheta = 3\pi/2$, $\psi = \pi$ (нижняя последовательность поворотов).

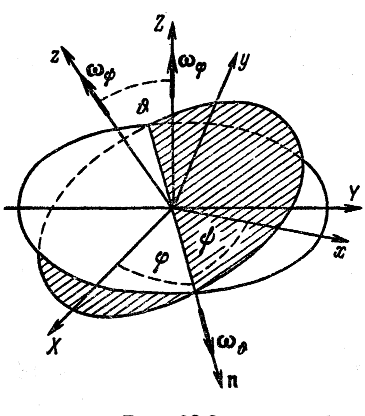


Рис. 22.2

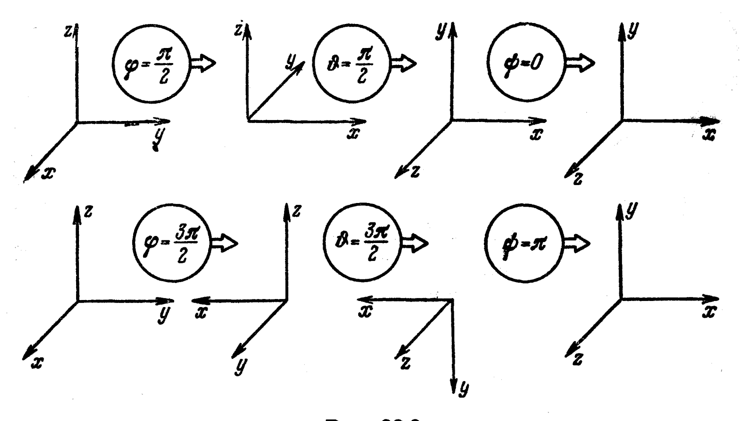


Рис. 22.3

Допустим, что ось Z направлена по вертикали, а система K' связана жестко с волчком (гироскопом), причем ось z совпадает с осью собственного вращения волчка. Тогда легко видеть, что изменение угла ψ соответствует собственному вращению волчка, измене-

ние угла φ — повороту вертикальной плоскости, в которой лежит ось z, т. е. прецессии волчка и, наконец, изменение угла ϑ — движению оси волчка, называемому нутацией[1]). В соответствии с этим угол φ называют углом прецессии, угол ϑ — углом нутации, а угол ψ — углом собственного вращения (или углом чистого вращения)[2]).

Скорость изменения угла φ можно охарактеризовать вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_\varphi$, направленным по оси Z (см. рис. 22.2); модуль этого вектора есть $\dot\varphi$. Разложим вектор $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ на две составляющие, одна из которых направлена по оси z (ее модуль равен $\dot\varphi\cos\vartheta$), а вторая перпендикулярна к оси z, т. е. лежит в плоскости xy (ее модуль равен $\dot\varphi\sin\vartheta$). Очевидно, что эта вторая составляющая перпендикулярна к линии узлов $\mathbf{n}$ и, следовательно, образует с осями x и y углы $\pi/2-\psi$ и ψ. Из сказанного можно заключить, что проекции вектора $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ на оси системы K' равны

$$\begin{aligned}(\omega_\varphi)_1 &= \dot\varphi\sin\vartheta\cos(\pi/2-\psi)=\dot\varphi\sin\vartheta\sin\psi,\\ (\omega_\varphi)_2 &= \dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi,\\ (\omega_\varphi)_3 &= \dot\varphi\cos\vartheta.\end{aligned}\qquad(22.1)$$

Скорость изменения угла ϑ характеризуется вектором $\boldsymbol{\omega}_\vartheta$, направленным по линии узлов; его модуль есть $\dot\vartheta$. Линия узлов перпендикулярна к оси z, а с осями x и y образует углы ψ и $\psi+\pi/2$. Следовательно, проекции вектора $\boldsymbol{\omega}_\vartheta$ на оси системы K' имеют значения

$$\begin{aligned}(\omega_\vartheta)_1 &= \dot\vartheta\cos\psi,\\ (\omega_\vartheta)_2 &= \dot\vartheta\cos(\psi+\pi/2)=-\dot\vartheta\sin\psi,\\ (\omega_\vartheta)_3 &= 0.\end{aligned}\qquad(22.2)$$

Наконец, скорость изменения угла ψ характеризуется вектором $\boldsymbol{\omega}_\psi$, направленным по оси z

[1]) В курсах общей физики обычно рассматривается только так называемая регулярная прецессия, для которой характерно, что угол между осью волчка и вертикалью остается неизменным. В действительности ось волчка, как правило, совершает колебание в плоскости Zz около некоторого среднего положения. Это колебание и есть нутация.

[2]) Иногда буквой ψ обозначают угол прецессии, а буквой φ — угол собственного вращения.

(его модуль есть $\dot{\psi}$). Проекции этого вектора на оси системы K' равны

$$(\omega_\psi)_1 = 0, \quad (\omega_\psi)_2 = 0, \quad (\omega_\psi)_3 = \dot{\psi}. \qquad (22.3)$$

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, с которой вращается тело относительно системы K[1]), можно представить как сумму угловых скоростей каждого из трех вращений, отвечающих изменениям эйлеровых углов

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\vartheta + \boldsymbol{\omega}_\psi.$$

Поэтому для проекций угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы K' с учетом формул (22.1), (22.2) и (22.3) получаются следующие значения:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi, \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \qquad (22.4)$$

Эти формулы нам понадобятся в дальнейшем.

§ 23. Тензор инерции[2])

Пусть мы наблюдаем движение твердого тела в неподвижной системе координат K (оси которой будем обозначать X_1, X_2, X_3 или X, Y, Z). В соответствии со сказанным в § 21 свяжем жестко с телом систему координат K' с осями x_1, x_2, x_3 (или x, y, z). Разобьем мысленно тело на частицы массы m_α[3]). Согласно формуле (21.10) скорость частицы с номером α запишется следующим образом:

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}_C + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha]. \qquad (23.1)$$

Вычислим кинетическую энергию тела. Она равна

$$T = {}^1/_2 \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{V}_\alpha^2 = {}^1/_2 \sum_\alpha m_\alpha \{\mathbf{V}_C + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha]\}^2 =$$
$$= {}^1/_2 \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{V}_C^2 + \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{V}_C [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha] + {}^1/_2 \sum_\alpha m_\alpha [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha]^2.$$

---

[1]) Относительно системы K' тело всегда неподвижно.

[2]) Прежде чем приступить к изучению этого параграфа, нужно ознакомиться с Приложением X.

[3]) Индекс α указывает номер частицы. Латинские индексы i, k, l, ... мы используем для нумерации координатных осей, компонент векторов и т. п.

В первом слагаемом можно вынести за знак суммы множитель V_C^2. В итоге это слагаемое примет вид $^1/_2 m V_C^2$, где $m = \sum m_\alpha$ — масса тела. Во втором слагаемом произведем циклическую перестановку сомножителей (см. (VI.3)), после чего вынесем постоянный множитель за знак суммы. В результате получим выражение $[\mathbf{V}_C, \boldsymbol{\omega}] \sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha = [\mathbf{V}_C, \boldsymbol{\omega}] m \mathbf{r}_C$, где $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра инерции C. Если поместить, как мы условились, начало системы K' в точку C, то второе слагаемое обращается в нуль.

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела распадается на два слагаемых. Первое слагаемое

$$T_{\text{пост}} = {}^1/_2 m \mathbf{V}_C^2 \tag{23.2}$$

представляет собой кинетическую энергию поступательного движения. Второе слагаемое

$$T_{\text{вращ}} = {}^1/_2 \sum_\alpha m_\alpha [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_\alpha]^2 \tag{23.3}$$

есть кинетическая энергия вращательного движения.

Подчеркнем, что обе эти энергии совершенно независимы — одна зависит только от $\mathbf{V}_C$, вторая — только от $\boldsymbol{\omega}$. Благодаря совмещению начала системы K' с точкой C слагаемое, в которое входили и $\mathbf{V}_C$, и $\boldsymbol{\omega}$, обратилось в нуль.

Преобразуем выражение (23.3) к другому виду. Прежде всего заменим квадрат векторного произведения в соответствии с (VI.6):

$$T_{\text{вращ}} = {}^1/_2 \sum_\alpha m_\alpha \{\omega^2 \mathbf{r}_\alpha^2 - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_\alpha)^2\}. \tag{23.4}$$

Теперь запишем это выражение, используя проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}_\alpha$ на оси системы K'. Проекции $\mathbf{r}_\alpha$ на оси системы K' равны просто координатам частицы: $x_{1\alpha}$, $x_{2\alpha}$, $x_{3\alpha}$. Обозначим проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы K' символами ω_1, ω_2, ω_3. Тогда выражение (23.4) в компонентах векторов примет вид

$$T_{\text{вращ}} = {}^1/_2 \sum_\alpha m_\alpha \left\{\left(\sum_i \omega_i^2\right)\left(\sum_l x_{l\alpha}^2\right) - \left(\sum_i \omega_i x_{i\alpha}\right)\left(\sum_k \omega_k x_{k\alpha}\right)\right\} = {}^1/_2 \sum_\alpha m_\alpha \left\{\left(\sum_i \omega_i^2\right)\left(\sum_l x_{l\alpha}^2\right) - \sum_{i,k} \omega_i \omega_k x_{i\alpha} x_{k\alpha}\right\}$$

(напомним, что немой индекс можно обозначать любой буквой).

В полученном нами выражении величины ω_i и ω_k не зависят от индекса α и их можно было бы вынести за знак суммы по α. Однако этому препятствует то обстоятельство, что в первый член выражения входит сумма квадратов ω_i^2, а во второй член — сумма произведений $\omega_i\omega_k$. Это препятствие можно устранить, заменив сумму величин ω_i^2 выражением $\sum\limits_{i,k}\omega_i\omega_k\delta_{ik}$, которое, очевидно, эквивалентно $\sum\limits_i \omega_i^2$. Тогда формула для вращательной энергии примет вид

$$T_{\text{вращ}} = {}^1/_2 \sum_\alpha m_\alpha \left\{\left(\sum_{i,k}\omega_i\omega_k\delta_{ik}\right)\left(\sum_l x_{l\alpha}^2\right) - \sum_{i,k}\omega_i\omega_k x_{i\alpha}x_{k\alpha}\right\} \tag{23.5}$$

(заметим, что $\sum\limits_l x_{l\alpha}^2$ есть просто некоторый скаляр[1]), зависящий от индекса α; каждое из слагаемых $\omega_i\omega_k\delta_{ik}$ умножается на этот скаляр).

В выражении (23.5) сначала производится суммирование по индексам i и k, а затем уже по индексу α. Изменим порядок суммирования так, чтобы суммирование по индексам i и k осуществлялось в последнюю очередь, т. е. перепишем (23.5) следующим образом:

$$T_{\text{вращ}} = {}^1/_2 \sum_{i,k}\omega_i\omega_k \sum_\alpha m_\alpha \left\{\delta_{ik}\left(\sum_l x_{l\alpha}^2\right) - x_{i\alpha}x_{k\alpha}\right\}.$$

Если ввести обозначение[2])

$$I_{ik} = \sum_\alpha m_\alpha \left\{\delta_{ik}\left(\sum_l x_{l\alpha}^2\right) - x_{i\alpha}x_{k\alpha}\right\}, \tag{23.6}$$

выражение для кинетической энергии вращательного движения можно записать в виде

$$T_{\text{вращ}} = {}^1/_2 \sum_{i,k} I_{ik}\omega_i\omega_k. \tag{23.8}$$

---

[1]) $\sum\limits_l x_{l\alpha}^2 = \mathbf{r}_\alpha^2 = \text{inv}.$

[2]) При вычислении величин I_{ik} для сплошного тела нужно вместо m_α взять ρdV и суммирование заменить интегрированием. Тогда

$$I_{ik} = \int \left\{\delta_{ik}\left(\sum_l x_l^2\right) - x_i x_k\right\} \rho\, dV. \tag{23.7}$$

Величина, определяемая формулой (23.6), есть некоторое число (но не инвариант!), зависящее от индексов i и k. Всего имеется девять таких чисел. Видно, что совокупность величин I_{ik} образует тензор второго ранга[1]). Действительно, произведение скаляра $\sum_i x_{i\alpha}^2$ на единичный тензор δ_{ik} будет тензором (см. формулы (X. 17) и (X. 19)), произведения $x_{i\alpha}x_{k\alpha}$ суть произведения компонент вектора $\mathbf{r}_\alpha$, т. е. тоже тензор (см. (X. 16)). Наконец, разность соответствующих компонент двух тензоров также дает компоненты некоторого тензора (см. X. 18)).

Итак, величины (23.6) суть компоненты тензора. Этот тензор называют *тензором инерции*. При перестановке индексов i и k величины (23.6) не изменяются. Следовательно, тензор инерции является симметричным ($I_{ik} = I_{ki}$).

Напишем компоненты тензора инерции, применив обычные обозначения декартовых координат:

$$(I_{ik}) = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix} \tag{23.9}$$

(чтобы не усложнять формул, мы опустили индекс α при m и координатах x, y, z; все суммы берутся по этому индексу).

Диагональные компоненты тензора называют *осевыми моментами инерции*. Они совпадают с известными из курса общей физики моментами инерции тела относительно соответствующих координатных осей.

---

[1]) К этому выводу можно также прийти путем следующих рассуждений. Представим выражение (23.8) в виде

$$T_{\text{вращ}} = {}^1/_2 \sum_i \omega_i \sum_k I_{ik}\omega_k.$$

Написанное нами выражение может быть инвариантом лишь в том случае, если величины $\sum_k I_{ik}\omega_k$ будут i-ми компонентами некоторого вектора (см. Приложение VI, текст, следующий за формулой (VI. 28)). Последнее, в свою очередь, возможно только в том случае, когда величины I_{ik} будут компонентами тензора (см. Приложение X, текст, расположенный между формулами (X. 22) и (X. 23)).

Недиагональные компоненты называют *центробежными моментами инерции.*

Геометрическим образом симметричного тензора является эллипсоид. В рассматриваемом нами случае это есть эллипсоид инерции. Направления в теле, совпадающие с полуосями эллипсоида инерции, называются *главными осями инерции* тела. Эти оси пересекаются в центре инерции тела. Если направить оси системы K' (т. е. оси x, y, z; напомним, что эти оси жестко связаны с телом) по главным осям инерции тела, то тензор инерции окажется приведенным к диагональному виду

$$(I_{ik})=\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \qquad (23.10)$$

Значения I_1, I_2, I_3 диагональных компонент тензора (в том случае, когда он приведен к диагональному виду) называют *главными моментами инерции* тела (их можно было бы обозначить символами I_x, I_y, I_z).

Если в качестве связанных с телом осей x, y, z выбраны главные оси инерции, выражение (23.8) для кинетической энергии вращательного движения упрощается следующим образом:

$$T_{\text{вращ}}={}^1/_2\left(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2\right) \qquad (23.11)$$

либо

$$T_{\text{вращ}}={}^1/_2\left(I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2\right) \qquad (23.12)$$

(напомним, что ω_1, ω_2, ω_3 суть проекции на оси x, y, z вектора $\boldsymbol{\omega}$ — угловой скорости вращения тела, наблюдаемого в системе с осями X, Y, Z).

В случае, когда вектор $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с одной из главных осей инерции, вдоль которой мы направим, скажем, ось z, выражение для энергии становится еше проще:

$$T_{\text{вращ}}={}^1/_2 I_z\omega^2. \qquad (23.13)$$

Выражение, аналогичное (23.13), получается также в том случае, когда тело вращается вокруг проходящей через центр инерции фиксированной относительно тела оси [1]). Направив вдоль этой оси, скажем, ось z,

[1]) Если эта ось не совпадает ни с одной из главных осей инерции, то ее нужно удерживать с помощью подшипников.

мы получим, что $\omega_x = \omega_y = 0$, а $\omega_z = \omega$. Тогда из девяти слагаемых формулы (23.8) отличным от нуля будет только одно, в котором $i = k = z$, так что

$$T_{\text{вращ}} = {}^1\!/_2 I_{zz}\omega_z^2 = {}^1\!/_2 I_{zz}\omega^2, \qquad (23.14)$$

где I_{zz}, вообще говоря, не является одним из главных моментов инерции.

Отметим, что, например, у такого тела, как однородный шар, эллипсоид инерции вырождается в сферу. Следовательно, главные оси инерции оказываются не фиксированными относительно тела. Это значит, что в качестве главных осей могут быть взяты любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр шара. В этом случае все главные моменты инерции оказываются одинаковыми: $I_1 = I_2 = I_3 = I$ и тензор инерции можно записать так:

$$(I_{ik}) = I \cdot (\delta_{ik}), \qquad (23.15)$$

где (δ_{ik}) — единичный тензор (см. X. 17)), а I — скаляр.

Все то, что мы сказали в отношении шара, оказывается справедливым и применительно к однородному кубу. Действительно, для него, очевидно, справедливо соотношение (23.15). Следовательно, эллипсоид инерции у куба вырождается в сферу. Поэтому любая ось (а не только ось симметрии), проходящая через центр куба, может рассматриваться как главная ось инерции. По этой причине куб наряду с шаром и другими телами, у которых $I_1 = I_2 = I_3$, называют шаровым волчком [1]).

Тело, у которого равны друг другу два главных момента инерции (например, $I_1 = I_2 \neq I_3$), называют симметричным волчком. Наконец, тело, у которого все три главные моменты инерции различны, называют асимметричным волчком.

До сих пор, рассматривая тензор инерции, мы предполагали, что начало связанной с телом системы K' помещается в центре инерции тела C. Однако тензор инерции можно определить по формуле (23.6) также и по отношению к связанной с телом

---

[1]) Для шарового волчка энергия всегда выражается формулой (23.13), причем под I_z следует понимать скалярный множитель I, входящий в выражение тензора инерции (23.15).

системе $K'_{(A)}$ с началом, помещающимся в произвольной точке A. Компоненты тензора в этом случае будут равны

$$I_{ik}^{(A)} = \sum_a m_a \left\{ \delta_{ik} \left[\sum_l \left(x_{la}^{(A)} \right)^2 \right] - x_{ia}^{(A)} x_{ka}^{(A)} \right\}. \quad (23.16)$$

Значения $I_{ik}^{(A)}$ оказываются связанными простыми соотношениями с значениями I_{ik} компонент тензора, определяемых по отношению к системе $K'_{(C)}$ с началом в точке C и осями, параллельными осям системы $K'_{(A)}$ (рис. 23.1). Для того чтобы найти эти соотношения, обозначим символом $\mathbf{a}$ радиус-вектор точки A в системе $K'_{(C)}$. Тогда для любой точки тела $\mathbf{r}_{(A)} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ и, следовательно,

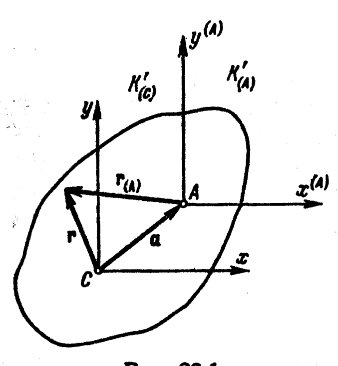


Рис. 23.1

$$x_i^{(A)} = x_i - a_i, \quad (23.17)$$

где a_i есть i-я координата точки A в системе $K'_{(C)}$.

Подставим значения (23.17) в формулу (23.16):

$$I_{ik}^{(A)} = \sum_a m_a \left\{ \delta_{ik} \left[\sum_l (x_{la} - a_l)^2 \right] - (x_{ia} - a_i)(x_{ka} - a_k) \right\} =$$
$$= \sum_a m_a \left\{ \delta_{ik} \left(\sum_l x_{la}^2 \right) - x_{ia} x_{ka} \right\} +$$
$$+ \sum_a m_a \left\{ \delta_{ik} \left(\sum_l a_l^2 \right) - a_i a_k \right\} -$$
$$- \sum_a m_a \delta_{ik} \sum_l 2 x_{la} a_l + \sum_a m_a x_{ia} a_k + \sum_a m_a x_{ka} a_i .$$

Первая из пяти сумм есть I_{ik}. Во второй сумме ни одна из величин в фигурных скобках не содержит индекса α. Кроме того, $\sum a_l^2$ есть квадрат вектора $\mathbf{a}$, т. е. a^2. Поэтому вторую сумму можно представить в виде $m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$. Третью сумму можно написать в виде $\sum_l 2\delta_{ik} a_l \sum_a m_a x_{la}$. Но $\sum_a m_a x_{la} = m x_{lC} = 0$, так что третья сумма равна нулю. Аналогично, вынеся в четвертой и пятой суммах не зависящий от α

множитель за скобки и приняв во внимание, что $x_{iC} = x_{kC} = 0$, установим, что обе эти суммы также равны нулю. Итак, мы приходим к соотношению

$$I_{ik}^{(A)} = I_{ik} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right), \qquad (23.18)$$

которое представляет собой тензорную запись теоремы Штейнера. Чтобы убедиться в этом, найдем компоненту $I_{33}^{(A)} = I_{zz}^{(A)}$. Согласно (23.18)

$$I_{zz}^{(A)} = I_{zz} + m\left(a^2 - a_z^2\right) = I_{zz} + m\left(a_x^2 + a_y^2\right) = I_{zz} + ma_\perp^2, \qquad (23.19)$$

где $a_\perp$ — расстояние между осями z и $z^{(A)}$.

Вычислим кинетическую энергию тела, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг неподвижной (в системе K) фиксированной относительно тела оси, не проходящей через его центр инерции. Если центр инерции находится от оси вращения на расстоянии $a_\perp$, его скорость $V_C = \omega a_\perp$. Следовательно,

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m\omega^2 a_\perp^2,$$

где m — масса тела. Вращательную энергию найдем по формуле (23.14), направив ось z параллельно неподвижной оси вращения. Сложив обе энергии, получим

$$T = \frac{1}{2} m\omega^2 a_\perp^2 + \frac{1}{2} I_{zz}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(ma_\perp^2 + I_{zz}\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{zz}^{(A)}\omega^2 \qquad (23.20)$$

(см. формулу (23.19)). Мы пришли опять к формуле (23.14).

Таким образом, формула (23.14) для кинетической энергии вращающегося тела справедлива не всегда, а только в двух случаях: 1) когда тело вращается вокруг одной из своих главных осей инерции (см. формулу (23.13)); 2) когда тело вращается вокруг неподвижной, фиксированной в нем оси (см. формулы (23.14) и (23.20)).

В заключение найдем вид тензора инерции в случае, когда только одна из координатных осей, скажем, ось z совпадает с одной из главных осей инерции тела. Переход от системы, все оси которой совпадают с главными осями, к интересующей нас системе осу-

ществляется поворотом вокруг оси z на угол φ. Легко убедиться в том, что таблица коэффициентов преобразования выглядит в этом случае следующим образом:

$$\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & 0\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|.$$

Компоненты тензора инерции в интересующей нас системе координат получим из компонент тензора, приведенного к главным осям, по формуле преобразования (X. 10). Представим компоненты тензора (23.10) в виде $I_{lm} = \delta_{lm} I_m$. Тогда, обозначив компоненты тензора в новой «штрихованной» системе просто I_{ik} (без штриха), можно написать

$$I_{ik} = \sum_{l,m} \alpha_{il}\alpha_{km}\delta_{lm}I_m = \sum_m \alpha_{im}\alpha_{km}I_m.$$

Согласно этой формуле

$$I_{11} = \sum_m \alpha_{1m}^2 I_m = \alpha_{11}^2 I_1 + \alpha_{12}^2 I_2 = \cos^2\varphi I_1 + \sin^2\varphi I_2.$$

Аналогичные выкладки дают, что $I_{22} = \sin^2\varphi I_1 + \cos^2\varphi I_2$, $I_{33} = I_3$, $I_{12} = I_{21} = \sin\varphi\cos\varphi(I_2 - I_1)$, $I_{13} = I_{31} = 0$, $I_{23} = I_{32} = 0$. Таким образом, тензор инерции в новой системе имеет вид

$$(I_{ik}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0\\ I_{21} & I_{22} & 0\\ 0 & 0 & I_3\end{pmatrix}. \qquad (23.21)$$

Отметим, что в случае, когда $I_1 = I_2 = I$, из полученных нами формул вытекает, что $I_{11} = I_{22} = I$, $I_{12} = I_{21} = 0$, т. е. что новый тензор не отличается от исходного. Так и должно быть, поскольку при равенстве моментов I_1 и I_2 главные оси x и y оказываются не фиксированными.

§ 24. Момент импульса твердого тела

Как и в предыдущих параграфах, будем рассматривать движение твердого тела в системе координат K с осями X_1, X_2, X_3. С телом свяжем жестко систему K', начало которой сначала поместим в произвольную точку A. Оси этой системы обозначим x_1, x_2, x_3 (или x, y, z). Тело разобьем мысленно на частицы массы m_α.

Согласно формуле (21.8) скорость частицы с номером α в системе K равна

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_A + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha^{(A)}], \quad (24.1)$$

где $\mathbf{v}_A$ — скорость начала системы K', $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения тела в системе K, $\mathbf{r}_\alpha^{(A)}$ — радиус-вектор частицы, проведенный из точки A.

Найдем момент импульса тела $\mathbf{M}_{(A)}$ относительно начала системы K' (относительно точки A). Радиус-вектор, проведенный из точки A к частице с номером α, есть $\mathbf{r}_\alpha^{(A)}$. Следовательно,

$$\mathbf{M}_{(A)} = \sum_\alpha [\mathbf{r}_\alpha^{(A)}, m_\alpha \mathbf{v}_\alpha].$$

Подстановка в это выражение значения (24.1) для $\mathbf{v}_\alpha$ дает

$$\mathbf{M}_{(A)} = \sum_\alpha [\mathbf{r}_\alpha^{(A)}, m_\alpha \mathbf{v}_A] + \sum_\alpha [\mathbf{r}_\alpha^{(A)}, m_\alpha [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha^{(A)}]]. \quad (24.2)$$

Второе слагаемое в (24.2) представляет собой значение $\mathbf{M}'_{(A)}$, которое имел бы момент при условии, что точка A была бы неподвижна. Следовательно, $\mathbf{M}'_{(A)}$ есть момент, обусловленный только вращением тела.

Преобразуем первое слагаемое в (24.2), воспользовавшись дистрибутивностью векторного произведения:

$$\sum_\alpha [\mathbf{r}_\alpha^{(A)}, m_\alpha \mathbf{v}_A] = \sum_\alpha [m_\alpha \mathbf{r}_\alpha^{(A)}, \mathbf{v}_A] = \left[\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha^{(A)}, \mathbf{v}_A\right] =$$
$$= [m\mathbf{r}_C^{(A)}, \mathbf{v}_A] = [\mathbf{r}_C^{(A)}, m\mathbf{v}_A].$$

Здесь m — масса тела, $\mathbf{r}_C^{(A)}$ — радиус-вектор центра инерции в системе K' (радиус-вектор, проведенный из A в C).

Таким образом, выражению (24.2) можно придать вид

$$\mathbf{M}_{(A)} = \mathbf{M}'_{(A)} + [\mathbf{r}_C^{(A)}, m\mathbf{v}_A]. \quad (24.3)$$

Слагаемое $\mathbf{M}'_{(A)}$, как мы уже отмечали, обусловлено вращением тела. Его можно назвать *собственным моментом* тела. Второе слагаемое обусловлено поступательным движением тела.

Если начало системы K' (т. е. точку A) поместить в центр инерции тела, $\mathbf{r}_C^{(A)}$ будет равен нулю, вследствие чего из (24.3) получается $\mathbf{M}_{(C)} = \mathbf{M}'_{(C)}$. Отсюда следует, что наблюдаемый в неподвижной системе K момент импульса тела относительно его центра инерции совпадает с собственным моментом, т. е. определяется только вращением и не зависит от того, движется центр инерции тела или покоится.

Найдем выражение для момента импульса[1]) тела относительно центра инерции. Если точка A совпадает с C, первое слагаемое в (24.2) обращается в нуль. Следовательно,

$$\mathbf{M}_{(C)} = \sum_\alpha m_\alpha [\mathbf{r}_\alpha [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha]] \tag{24.4}$$

(напомним, что $\mathbf{r}_\alpha$ — радиус-вектор частицы, проведенный из точки C). Преобразуем это выражение по формуле «бац минус цаб» (см. (VI.5)):

$$\mathbf{M}_{(C)} = \sum_\alpha m_\alpha \{\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha^2 - \mathbf{r}_\alpha(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha)\} = \\ = \sum_\alpha m_\alpha \left\{\boldsymbol{\omega}\left(\sum_l x_{l\alpha}^2\right) - \mathbf{r}_\alpha\left(\sum_k \omega_k x_{k\alpha}\right)\right\}$$

(мы выразили скалярные произведения через проекции соответствующих векторов на оси связанной с телом системы K').

Вычислим компоненты вектора $\mathbf{M}_{(C)}$ по осям системы K' (в дальнейших формулах индекс «C в скобках» мы опустим). Для компоненты по i-й оси получаем

$$M_i = \sum_\alpha m_\alpha \left\{\omega_i\left(\sum_l x_{l\alpha}^2\right) - x_{i\alpha}\left(\sum_k \omega_k x_{k\alpha}\right)\right\}.$$

Представим ω_i в виде

$$\omega_i = \sum_k \delta_{ik}\omega_k.$$

Тогда

$$M_i = \sum_\alpha m_\alpha \left\{\sum_k \delta_{ik}\omega_k\left(\sum_l x_{l\alpha}^2\right) - x_{i\alpha}\sum_k \omega_k x_{k\alpha}\right\}.$$

[1]) Наблюдаемого в системе K. В системе K' тело покоится, так что момент импульса в этой системе всегда равен нулю.

Наконец, изменим порядок суммирования по индексам α и k:

$$M_i = \sum_k \omega_k \left\{ \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ik} \left(\sum_l x_{l\alpha}^2 \right) - x_{i\alpha} x_{k\alpha} \right) \right\}.$$

Выражение в квадратных скобках есть компонента тензора инерции I_{ik} (см. формулу (23.6)). Таким образом, для проекции вектора **M** на i-ю ось связанной с телом координатной системы получается следующее выражение:

$$M_i = \sum_k I_{ik} \omega_k \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{24.5}$$

(напомним, что ω_k — проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на k-ю ось системы K').

Из формулы (24.5) вытекает, что векторы **M** и $\boldsymbol{\omega}$, вообще говоря, не коллинеарны друг другу. Если оси системы K' (т. е. оси x, y, z) направить по главным осям инерции тела, формула (24.5) упрощается следующим образом:

$$M_i = I_i \omega_i \qquad (i = x,\ y,\ z). \tag{24.6}$$

Здесь I_i — i-й главный момент инерции.

Пусть тело вращается вокруг, например, третьей главной оси инерции. Тогда $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$, так что

$$M = M_z = I_z \omega_z = I_z \omega.$$

Последнее соотношение можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{M} = I_z \boldsymbol{\omega}. \tag{24.7}$$

Из формулы (24.6) видно, что в случае шарового волчка (т. е. тела, для которого $I_1 = I_2 = I_3 = I$) векторы **M** и $\boldsymbol{\omega}$ также будут коллинеарными, причем $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$.

Если тело вращается вокруг фиксированной в нем оси z, не совпадающей ни с одной из главных осей инерции, то $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$. Тогда формула (24.5) дает

$$M_x = I_{xz} \omega, \quad M_y = I_{yz} \omega, \quad M_z = I_{zz} \omega.$$

Подчеркнем, что сам вектор **M** в этом случае не коллинеарен с вектором $\boldsymbol{\omega}$ и поворачивается вокруг направления $\boldsymbol{\omega}$ вместе с осями x и y.

Проекция вектора **M** на ось, проходящую через точку, относительно которой определен **M**, называется моментом импульса относительно этой оси. Следовательно, момент импульса относительно, например, оси z равен

$$M_z = J_{zz}\omega. \tag{24.8}$$

В заключение рассмотрим случай, когда тело вращается вокруг неподвижной (в системе K), фиксированной в нем оси, не проходящей через его центр инерции C (рис. 24.1). Возьмем на оси вращения произвольную точку A. Проведем из этой точки в точку C вектор, который обозначим символом **a**. Тогда для каждой из частиц тела

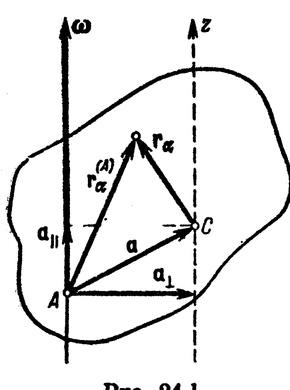


Рис. 24.1

$$\mathbf{r}_\alpha^{(A)} = \mathbf{a} + \mathbf{r}_\alpha, \tag{24.9}$$

где $\mathbf{r}_\alpha^{(A)}$ — радиус-вектор частицы с номером α, проведенный из точки A, $\mathbf{r}_\alpha$ — радиус-вектор той же частицы, проведенный из точки C.

По предположению ось вращения неподвижна. Поэтому скорость $\mathbf{V}_A$ равна нулю. Найдем момент импульса тела относительно точки A, т. е. $\mathbf{M}_{(A)}$. В соответствии с формулой (24.2)

$$\mathbf{M}_{(A)} = \sum_\alpha \left[\mathbf{r}_\alpha^{(A)}, m_\alpha \left[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha^{(A)}\right]\right].$$

Подставим сюда значение (24.9) для $\mathbf{r}_\alpha^{(A)}$:

$$\mathbf{M}_{(A)} = \sum_\alpha \left[\mathbf{a} + \mathbf{r}_\alpha, m_\alpha [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a} + \mathbf{r}_\alpha]\right]. \tag{24.10}$$

Воспользовавшись дистрибутивностью векторного произведения, можно после несложных преобразований привести выражение (24.10) к виду

$$\mathbf{M}_{(A)} = [\mathbf{a}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}]]\left(\sum_\alpha m_\alpha\right) + \left[\mathbf{a}\left[\boldsymbol{\omega}, \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha\right]\right] + \\ + \left[\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha, [\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}]\right] + \sum_\alpha [\mathbf{r}_\alpha, m_\alpha[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\alpha]]. \tag{24.11}$$

Поскольку $\sum m_a \mathbf{r}_a = m\mathbf{r}_C = 0$, второе и третье слагаемые в полученном нами выражении равны нулю. Применение формулы «бац минус цаб» и замена $\sum m_a$ массой тела m превращает первое слагаемое в

$$m[\boldsymbol{\omega}a^2 - \mathbf{a}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{a})] = m\left[\left(a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2\right)\boldsymbol{\omega} - a_{\parallel}\omega\mathbf{a}\right],$$

где $\mathbf{a}_{\parallel}$ — составляющая вектора $\mathbf{a}$, параллельная $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{a}_{\perp}$ — составляющая $\mathbf{a}$, перпендикулярная к $\boldsymbol{\omega}$ ($a_{\perp}$ есть расстояние между осью вращения и параллельной ей осью z, проведенной через точку C).

Наконец, сравнение с формулой (24.4) показывает, что последнее слагаемое в (24.11) есть $\mathbf{M}_{(C)}$ — момент импульса тела относительно точки C. Таким образом, в изображенном на рис. 24.1 случае

$$\mathbf{M}_{(A)} = m\left(a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2\right)\boldsymbol{\omega} - ma_{\parallel}\omega\mathbf{a} + M_{(C)}. \qquad (24.12)$$

Найдем момент импульса тела относительно оси вращения (которую мы будем обозначать буквой ω). Для этого нужно спроектировать вектор (24.12) на ось ω. Проекция первого слагаемого равна $m\left(a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2\right)\omega$. Проекция второго слагаемого равна $-ma_{\parallel}\omega a_{\parallel} = -ma_{\parallel}^2\omega$. Согласно формуле (24.8) проекция третьего слагаемого есть $I_z^{(C)}\omega$, где $I_z^{(C)}$ — момент инерции тела относительно оси z, проходящей через точку C. Следовательно,

$$M_{\omega} = m\left(a_{\perp}^2 + a_{\perp}^2\right)\omega - ma_{\perp}^2\omega + I_z^{(C)}\omega =$$
$$= \left(I_z^{(C)} + ma_{\perp}^2\right)\omega = I_{\omega}^{(A)}\omega. \qquad (24.13)$$

Здесь $I_{\omega}^{(A)}$ — определенный по теореме Штейнера момент инерции тела относительно оси ω, проходящей через точку A.

Таким образом как бы ни была выбрана неподвижная ось вращения, жестко связанная с телом, момент импульса тела относительно выбранной оси равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на модуль угловой скорости (см. формулы (24.8) и (24.13)). Отметим, что, если ось, на которую проектируется момент, и вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлены в противоположные стороны, то в формуле (24.13) появится знак минус.

§ 25. Свободные оси вращения

Свободными осями вращения тела называются, как известно, оси, которые сохраняют свое положение в пространстве без воздействия на них внешних сил. В этом параграфе мы докажем, что свободными осями вращения могут быть только главные оси инерции тела.

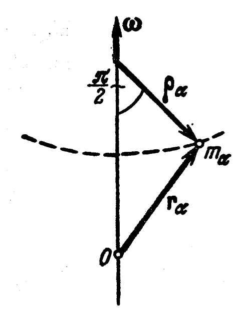


Рис. 25.1

Допустим, что тело вращается с угловой скоростью ω вокруг некоторой связанной с ним неподвижной оси (рис. 25.1). При этом каждой частице тела должно быть сообщено ускорение

$$\mathbf{w}_\alpha = -\omega^2 \boldsymbol{\rho}_\alpha,$$

где $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ — перпендикулярная к оси вращения составляющая радиуса-вектора $\mathbf{r}_\alpha$ данной частицы ($\mathbf{r}_\alpha$ проведен из точки O, лежащей на оси вращения [1])).

Для того чтобы сообщить частице такое ускорение, необходимо приложить к ней силу

$$\mathbf{F}_\alpha = m_\alpha \mathbf{w}_\alpha = -m_\alpha \omega^2 \boldsymbol{\rho}_\alpha, \tag{25.1}$$

момент которой относительно точки 0 равен

$$\mathbf{N}_\alpha = [\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{F}_\alpha] = -m_\alpha \omega^2 [\mathbf{r}_\alpha, \boldsymbol{\rho}_\alpha]. \tag{25.2}$$

Сложив все силы (25.1), получим результирующую внешнюю силу, которая должна быть приложена к телу, чтобы обеспечить вращение его вокруг рассматриваемой оси [2]):

$$\mathbf{F} = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha = -\omega^2 \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha. \tag{25.3}$$

---

[1]) В соответствии с принятыми нами обозначениями этот вектор следовало бы обозначить символом $\mathbf{r}_\alpha^{(0)}$. Однако, поскольку в этом параграфе нам не встретятся радиусы-векторы, проведенные из точки C, мы, чтобы не усложнять обозначений, опустим индекс «0 в скобках» при символах векторов и координат.

[2]) Силы $\mathbf{F}_\alpha$ включают в себя как внешние, так и внутренние силы, но результирующая внутренних сил, как известно, равна нулю.

Результирующий момент внешних сил должен быть равен сумме моментов (25.2):

$$\mathbf{N} = \sum_\alpha \mathbf{N}_\alpha = -\omega^2 \sum_\alpha m_\alpha [\mathbf{r}_\alpha, \boldsymbol{\rho}_\alpha]. \qquad (25.4)$$

Свяжем с телом систему координат, поместив ее начало в точку 0, а ось z направив вд ль вектора $\boldsymbol{\omega}$. Компоненты вектора $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ по осям такой системы равны x_α, y_α, 0. Следовательно,

$$[\mathbf{r}_\alpha, \boldsymbol{\rho}_\alpha] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ x_\alpha & y_\alpha & 0 \end{vmatrix},$$

так что компоненты вектора $[\mathbf{r}_\alpha, \boldsymbol{\rho}_\alpha]$ равны:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_\alpha, \boldsymbol{\rho}_\alpha]_{\text{пр.}\,x} &= y_\alpha \cdot 0 - z_\alpha y_\alpha = -y_\alpha z_\alpha, \\ [\mathbf{r}_\alpha, \boldsymbol{\rho}_\alpha]_{\text{пр.}\,y} &= z_\alpha x_\alpha - x_\alpha \cdot 0 = x_\alpha z_\alpha, \\ [\mathbf{r}_\alpha, \boldsymbol{\rho}_\alpha]_{\text{пр.}\,z} &= x_\alpha y_\alpha - y_\alpha x_\alpha = 0. \end{aligned} \qquad (25.5)$$

Теперь напишем компоненты результирующей силы $\mathbf{F}$ и результирующего момента $\mathbf{N}$. Согласно формуле (25.3)

$$\begin{aligned} F_x &= -\omega^2 \sum_\alpha m_\alpha x_\alpha = -\omega^2 m x_C, \\ F_y &= -\omega^2 \sum_\alpha m_\alpha y_\alpha = -\omega^2 m y_C, \\ F_z &= 0. \end{aligned}$$

где x_C и y_C — координаты центра инерции тела. Если ось вращения проходит через центр инерции, эти координаты будут нулями, так что все компоненты силы, а значит и сама $\mathbf{F}$ будут равны нулю.

Согласно формулам (25.4) и (25.5)

$$\begin{aligned} N_x &= -\omega^2 \sum_\alpha m_\alpha (-y_\alpha z_\alpha) = -\omega^2 I_{yz}, \\ N_y &= -\omega^2 \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha z_\alpha) = \omega^2 I_{xz}, \\ N_z &= -\omega^2 \sum_\alpha m_\alpha \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

где I_{yz} и I_{xz} — центробежные моменты инерции тела (см. формулу (23.9)). Если ось z, вокруг которой происходит вращение, является одной из главных осей инерции, центробежные моменты I_{xz} и I_{yz} равны нулю

(см. (23.21)), так что все компоненты результирующего момента сил, а значит, и сам момент **N** будут равными нулю.

Итак, мы доказали, что в случае, когда тело вращается вокруг одной из своих главных осей инерции, результирующая внешних сил и результирующий момент этих сил равны нулю. Значит, для того чтобы такая ось вращения сохраняла свое положение в пространстве, необходимости во внешних силах нет.

§ 26. Уравнение движения твердого тела

Возьмем в качестве обобщенных координат, определяющих положение тела в неподвижной системе K, декартовы координаты центра инерции X_{1C}, X_{2C}, X_{3C} (им соответствует радиус-вектор $\mathbf{R}_C$) и эйлеровы углы φ, ϑ, ψ, причем оси связанной с телом системы K' направим по главным осям инерции тела.

В § 23 мы установили, что кинетическая энергия твердого тела слагается из энергии поступательного движения (23.2) и энергии вращательного движения, которая при сделанном нами выборе осей K' определяется формулой (23.11). Таким образом, для функции Лагранжа твердого тела можно написать следующее выражение:

$$L = {}^1/_2 m\mathbf{V}_C^2 + {}^1/_2 \left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right) - U. \qquad (26.1)$$

Чтобы получить выражение L в принятых нами обобщенных координатах, заменим $\mathbf{V}_C$ через $\mathbf{R}_C$, а проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы K' выразим через эйлеровы углы (см. (22.4)). В результате получим

$$L = {}^1/_2 m\dot{\mathbf{R}}_C^2 + {}^1/_2 \{I_1(\dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta\cos\psi)^2 + \\ + I_2(\dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi - \dot\vartheta\sin\psi)^2 + I_3(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2\} - \\ - U(\mathbf{R}_C, \varphi, \vartheta, \psi) \qquad (26.2)$$

(напомним, что I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции тела).

Зная вид функции $U(\mathbf{R}_C, \varphi, \vartheta, \psi)$, можно составить уравнения Лагранжа и решить соответствующую задачу о движении твердого тела. Уравнение Лагранжа,

соответствующее координатам центра инерции, имеет вид

$$\frac{d}{dt} m\dot{\mathbf{R}}_C = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}_C} = -\nabla U = \mathbf{F},$$

откуда получается уравнение движения центра инерции тела:

$$m\ddot{\mathbf{R}}_C = \mathbf{F}, \qquad (26.3)$$

где $\mathbf{F}$ — результирующая внешних сил, действующих на тело.

Чтобы получить уравнение, определяющее поведение со временем момента импульса тела $\mathbf{M}$, вспомним, что для отдельной частицы

$$\dot{\mathbf{M}}_a = [\mathbf{r}_a\mathbf{F}_a] = \mathbf{N}_a,$$

т. е. производная по времени от момента импульса равна моменту силы, действующей на частицу. Просуммировав по всем частицам тела, получим

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt}\sum_a \mathbf{M}_a = \sum_a [\mathbf{r}_a\mathbf{F}_a] = \mathbf{N}, \qquad (26.4)$$

где $\mathbf{N}$ — сумма моментов всех действующих на тело внешних сил относительно точки C (моменты внутренних сил в сумме дают нуль).

Запишем уравнение (26.4) в проекциях на оси системы K' (на главные оси инерции тела):

$$\frac{d}{dt} M_i = N_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (26.5)$$

Проекцию N_i можно представить в виде

$$N_i = -\frac{\delta U}{\delta \Phi_i} = -\frac{\partial U}{\partial \Phi_i} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_i}, \qquad (26.6)$$

где $\delta\Phi_i$ — угол поворота тела вокруг i-й главной оси ($\omega_i = d\Phi_i/dt$). Действительно, при повороте тела на угол $\delta\Phi_i$ силы, приложенные к телу, совершают работу

$$\delta A = \sum \mathbf{F}\,\delta\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}\,[\delta\Phi_i \mathbf{e}_i,\ \mathbf{r}].$$

Здесь суммирование производится не по индексу i, а по всем внешним силам, действующим на тело, $\delta\mathbf{R}$ — перемещение точки приложения соответствующей

силы, $\mathbf{e}_i$ — орт i-й главной оси, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы, проведенный из точки C ($\mathbf{R}$ проводится из начала системы K). Осуществив циклическую перестановку сомножителей и вынеся общий множитель $\delta\Phi_i\mathbf{e}_i$ за знак суммы, придем к выражению

$$\delta A = \delta\Phi_i\mathbf{e}_i \sum [\mathbf{rF}] = \delta\Phi_i\mathbf{e}_i\mathbf{N} = N_i\,\delta\Phi_i,$$

где N_i — проекция результирующего момента сил на ось, вокруг которой произведен поворот на угол $\delta\Phi_i$. Вычисленная нами работа δA совершается за счет убыли потенциальной энергии U, т. е.

$$\delta A = N_i\,\delta\Phi_i = -\delta U,$$

откуда и следует формула (26.6).

Мы получили формулу (26.6), рассматривая поворот вокруг одной из главных осей инерции тела. Однако эта формула справедлива в самом общем случае — для поворота вокруг произвольной оси (конечно, при условии, что сила, момент которой рассматривается, является потенциальной).

Из формулы (26.6) следует, что величины N_i суть обобщенные силы, отвечающие обобщенной координате Φ_i (см. (4.20)).

Теперь продифференцируем функцию (26.1) по ω_i. В результате получим

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = I_i\omega_i = M_i$$

(см. формулу (24.6)). Проекцию угловой скорости ω_i можно представить как $\dot{\Phi}_i$ (см. текст, следующий за формулой (26.6)). Следовательно, можно написать, что

$$M_i = \frac{\partial L}{\partial \omega_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_i} \tag{26.7}$$

(ср. с формулой (11.3)). Из формулы (26.7) вытекает, что величины M_i суть обобщенные импульсы, отвечающие обобщенным координатам Φ_i (см. (4.19)).

Воспользовавшись соотношениями (26.6) и (26.7), формулу (26.5) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_i}, \tag{26.8}$$

т. е. как уравнение Лагранжа, отвечающее обобщенной координате Φ_i.

Следует иметь в виду, что при сделанном нами выборе осей системы K' только эйлеров угол ψ соответствует повороту вокруг главной оси. Остальные же углы соответствуют поворотам вокруг неподвижной оси X_3 и вокруг линии узлов.

Продифференцировав функцию (26.2) по $\dot\psi$, найдем выражение для проекции момента импульса на ось x_3 (на ось z) через эйлеровы углы

$$M_\psi = M_3 = I_3(\dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi). \qquad (26.9)$$

Допустим, что эйлеров угол ϑ равен нулю. Это означает, что оси Z и z все время совпадают — тело вращается вокруг связанной с телом оси, которая неподвижна в системе K. В этом случае сумма углов $\varphi + \psi$ определяет полный угол поворота тела вокруг оси z. Положение линии узлов в этом случае оказывается неопределенным — эта линия может быть расположена в любом месте между осями X и x. В частности, можно совместить линию узлов с осью X, тогда $\varphi = 0$ и поворот тела вокруг оси z будет характеризоваться углом собственного вращения ψ. Если совместить линию узлов с осью x, будет равен нулю угол ψ и поворот вокруг оси z будет описываться углом прецессии φ.

При $\vartheta = 0$ формула (26.9) принимает вид

$$M_3 = I_3(\dot\varphi + \dot\psi) = I_3\omega_3,$$

где ω_3 — угловая скорость вращения тела вокруг оси z.

При $\vartheta = \pi/2$ формула (26.9) упрощается следующим образом:

$$M_\psi = M_3 = I_3\dot\psi = I_3\omega_\psi,$$

где ω_ψ — угловая скорость собственного вращения тела.

В заключение составим уравнение Лагранжа для тела, вращающегося вокруг жестко связанной с ним оси, неподвижной в системе K. Для большей общности будем считать, что ось вращения не проходит через центр инерции тела C и не параллельна ни одной из главных осей инерции тела.

Направим оси Z и z по оси вращения тела. Тогда эйлеров угол ϑ будет равен нулю. Поскольку линия

узлов в этом случае не фиксирована, совместим ее с осью x, тогда угол ψ также обращается в нуль. При сделанном нами выборе оси z (по направлению вектора $\boldsymbol{\omega}$) $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega = \dot{\varphi}$.

Кинетическую энергию для подобного случая мы вычислили раньше. Она оказалась равной значению (23.20). Следовательно, функция Лагранжа имеет вид

$$L = {}^1/_2 I_{zz}^{(A)} \omega^2 - U(\varphi) = {}^1/_2 I_{zz}^{(A)} \dot{\varphi}^2 - U(\varphi) \tag{26.10}$$

(A — не совпадающая с C точка, в которой находится начало системы K').

Составим уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}.$$

Из (26.10) следует, что левая часть равна $I_{zz}^{(A)}\dot{\omega}$. Согласно (26.6) правая часть, равная $-\partial U/\partial\varphi$, есть проекция результирующего момента сил на ось вращения, т. е. N_z. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$I_{zz}^{(A)}\dot{\omega} = N_z.$$

§ 27. Уравнения Эйлера

Уравнения Лагранжа, соответствующие эйлеровым углам (т. е. описывающие вращение тела), оказываются, как легко заключить из вида функции (26.2), весьма сложными. Иногда бывает удобнее пользоваться другими уравнениями, полученными Эйлером и носящими его имя. Чтобы прийти к этим уравнениям, будем исходить из соотношения (26.4):

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}. \tag{27.1}$$

Уравнение (27.1) справедливо в инерциальной системе отсчета (т. е. в неподвижной системе K). Мы попытаемся найти уравнение, справедливое во вращающейся вместе с телом системе K', оси которой совпадают с главными осями инерции тела.

В уравнении (27.1) $d\mathbf{M}$ есть приращение вектора $\mathbf{M}$ за время dt, наблюдаемое в системе K. Согласно (15.6) это приращение можно представить в виде

$$d\mathbf{M} = d'\mathbf{M} + [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{M}],$$

где $d'\mathbf{M}$ — приращение вектора $\mathbf{M}$ за время dt, наблюдаемое в системе K', $d\boldsymbol{\varphi}$ — угол, на который поворачивается система K' за время dt. Разделив последнее уравнение на dt, получим

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\frac{d'\mathbf{M}}{dt}+[\boldsymbol{\omega}\mathbf{M}], \qquad (27.2)$$

где $d\mathbf{M}/dt$ — скорость изменения вектора $\mathbf{M}$, наблюдаемая в системе K, $d'\mathbf{M}/dt$ — скорость изменения того же вектора, наблюдаемая в системе K', $\boldsymbol{\omega}=d\boldsymbol{\varphi}/dt$ — угловая скорость вращения системы K' (т. е. угловая скорость вращения тела).

Формула (27.2) справедлива для любого вектора, в частности она справедлива и для вектора $\boldsymbol{\omega}$. В последнем случае имеем

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}+[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}].$$

Поскольку $[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}]=0$, мы приходим к соотношению

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}, \qquad (27.3)$$

из которого следует, что скорости изменения вектора $\boldsymbol{\omega}$, наблюдаемые в системах K и K', одинаковы.

Заменим левую часть формулы (27.1) выражением (27.2). В результате получим уравнение

$$\frac{d'\mathbf{M}}{dt}+[\boldsymbol{\omega}\mathbf{M}]=\mathbf{N}.$$

Спроектируем все векторы на i-ю ось системы K', учтя, что проекция вектора $\mathbf{M}$ на эту ось $M_i=I_i\omega_i$ (см. (24.6)):

$$\frac{d'(I_i\omega_i)}{dt}+[\boldsymbol{\omega}\mathbf{M}]_{\text{пр}\,x_i}=N_i.$$

Приняв во внимание, что $I_i=\text{const}$, а $d'\boldsymbol{\omega}/dt=d\boldsymbol{\omega}/dt$ (см. (27.3)), можно записать полученное нами уравнение следующим образом:

$$I_i\frac{d\omega_i}{dt}+[\boldsymbol{\omega}\mathbf{M}]_{\text{пр}\,x_i}=N_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \qquad (27.4)$$

Представим проекцию векторного произведения на ось x_i по формуле (VI. 33):

$$[\boldsymbol{\omega}\mathbf{M}]_{\text{пр}\,x_i}=\sum_{k,\,l}\varepsilon_{ikl}\omega_k M_l=\sum_{k,\,l}\varepsilon_{ikl}\omega_k I_l\omega_l$$

и подставим это выражение в (27.4). В итоге придем к уравнениям

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \sum_{k,\,l} \varepsilon_{ikl} I_l \omega_k \omega_l = N_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \qquad (27.5)$$

которые и представляют собой уравнения Эйлера. Положив последовательно $i=1$, $i=2$, $i=3$ и произведя суммирование по k и l, получим три уравнения:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 &= N_1, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\omega_3\omega_1 &= N_2, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2 &= N_3. \end{aligned} \qquad (27.6)$$

Отметим, что каждое следующее уравнение получается из предыдущего с помощью циклической перестановки индексов 1, 2, 3.

Легко видеть, что в случае шарового волчка уравнения (27.6) превращаются в уравнение $I\dot{\boldsymbol\omega} = \mathbf{N}$.

§ 28. Свободный симметричный волчок

Применим уравнения Эйлера для исследования движения симметричного волчка (т. е. тела, у которого $I_1 = I_2 \neq I_3$), не подверженного действию внешних сил. В этом случае центр инерции тела движется с постоянной скоростью или покоится (см. формулу (26.3)). Поэтому можно из всех инерциальных систем выбрать ту систему K, начало которой совмещено с центром инерции тела C. В этой системе поступательное движение тела отсутствует и остается выяснить только характер вращательного движения.

В отсутствие внешних сил момент импульса тела $\mathbf{M}$ остается по отношению к неподвижной системе K неизменным по величине и направлению. Выберем направление вектора $\mathbf{M}$ в качестве оси Z. Относительно связанной с телом системы K' вектор $\mathbf{M}$, как мы увидим, вообще говоря, все время изменяет свое направление.

Поскольку $I_1 = I_2$ и момент внешних сил равен нулю, уравнения (27.6) выглядят следующим об-

разом[1]):

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_1)\,\omega_2\omega_3 = 0,$$
$$I_1 \frac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 = 0, \qquad (28.1)$$
$$\frac{d\omega_3}{dt} = 0.$$

Из третьего уравнения сразу получается, что $\omega_3 = \omega_\parallel = \mathrm{const}$. Это означает, что проекция вектора угловой скорости на связанную с телом ось z остается постоянной.

Введя обозначение

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\,\omega_\parallel, \qquad (28.2)$$

запишем первые два уравнения (28.1) в виде

$$\dot\omega_1 = -\Omega\omega_2, \quad \dot\omega_2 = \Omega\omega_1.$$

Легко убедиться в том, что полученная нами система удовлетворяется функциями

$$\omega_1 = \omega_\perp \cos(\Omega t + \alpha), \quad \omega_2 = \omega_\perp \sin(\Omega t + \alpha), \qquad (28.3)$$

где $\omega_\perp$ и α — константы, причем $\omega_\perp = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ есть величина проекции вектора $\boldsymbol\omega$ на плоскость xy, перпендикулярную к оси собственного вращения тела z. Из (28.3) следует, что перпендикулярная к оси z составляющая $\omega_\perp$, оставаясь постоянной по величине, вращается равномерно в плоскости xy с угловой скоростью Ω, определяемой формулой (28.2). Параллельная оси z составляющая $\omega_\parallel$ тоже остается, как мы видели, постоянной по величине. Отсюда заключаем, что вектор $\boldsymbol\omega$ вращается относительно тела с угловой скоростью Ω, описывая конус вокруг оси z, причем модуль вектора $\boldsymbol\omega$ не изменяется (рис. 28.1[2])).

---

[1]) Напомним, что уравнения Эйлера пишутся в системе координат, оси которой совпадают с главными осями инерции тела.

[2]) Практически в качестве симметричного волчка берут тело вращения. Однако мы изобразили на рисунке тело неправильной формы с целью подчеркнуть, что единственным условием того, чтобы тело было симметричным волчком, является равенство двух его главных моментов инерции.

Согласно (24.6) проекции вектора **M** на оси x, y, z равны

$$M_x = I_1\omega_1, \quad M_y = I_1\omega_2, \quad M_z = I_3\omega_3.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M} = I_1\omega_1\mathbf{e}_x + I_1\omega_2\mathbf{e}_y + I_3\omega_3\mathbf{e}_z = I_1(\omega_1\mathbf{e}_x + \omega_2\mathbf{e}_y) + I_3\omega_3\mathbf{e}_z,$$

где $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — орты соответствующих осей (эти оси вращаются вместе с телом). Сумма $\omega_1\mathbf{e}_x + \omega_2\mathbf{e}_y$ дает перпендикулярную к оси z составляющую $\boldsymbol{\omega}_\perp$; $\omega_3\mathbf{e}_z$ есть параллельная оси z составляющая $\boldsymbol{\omega}_\parallel$. Таким образом,

$$\mathbf{M} = I_1\boldsymbol{\omega}_\perp + I_3\boldsymbol{\omega}_\parallel. \tag{28.4}$$

Направления векторов **M** и $\boldsymbol{\omega}$ проходят через общее для систем K и K' начало — точку C. Значит, эти векторы определяют некоторую плоскость (плоскость Zz).

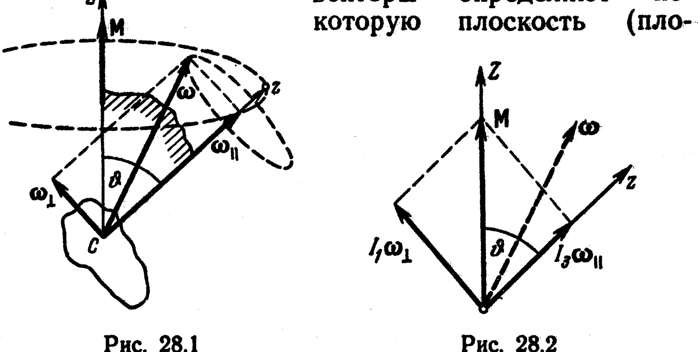


Рис. 28.1 Рис. 28.2

Для того чтобы могло выполняться равенство (28.4), вектор $\boldsymbol{\omega}_\perp$ должен лежать в этой же плоскости. Следовательно, и вектор $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\perp + \boldsymbol{\omega}_\parallel$ лежит в плоскости Zz. Отсюда заключаем, что векторы **M**, $\boldsymbol{\omega}$ и ось собственного вращения тела z в каждый момент времени лежат в одной плоскости (на рис. 28.1 эта плоскость заштрихована). Эта плоскость вращается вокруг направления **M**. Вместе с ней поворачивается ось z, описывая вокруг оси Z круговой конус. Такое вращение оси тела z называется *регулярной прецессией*. Для регулярной прецессии характерно постоянство угла нутации ϑ.

Вектор $\boldsymbol{\omega}$, как мы установили, вращается относительно тела вокруг оси z с угловой скоростью Ω. Вме-

сте с тем этот вектор остается в плоскости Zz. Отсюда следует, что относительно плоскости Zz тело вращается вокруг оси z в противоположную сторону с той же скоростью Ω.

На рис. 28.2 изображены составляющие $I_1\omega_\perp$ и $I_3\omega_\parallel$, которые в сумме дают момент импульса $\mathbf{M}$ (см. (28.4)). Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{I_1\omega_\perp}{I_3\omega_\parallel}. \tag{28.5}$$

Ранее мы установили, что $\omega_\perp$ и $\omega_\parallel$ — константы. Следовательно, $\operatorname{tg}\vartheta$, а значит, и сам угол нутации ϑ остается неизменным. Угол между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и осью z также постоянен (его тангенс равен $\omega_\perp/\omega_\parallel$).

Величины $\omega_\perp$ и $\omega_\parallel$ определяются энергией тела T и моментом импульса M. Действительно,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_1\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right) = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_\perp^2 + I_3\omega_\parallel^2\right), \\ M^2 &= (I_1\omega_1)^2 + (I_1\omega_2)^2 + (I_3\omega_3)^2 = I_1^2\omega_\perp^2 + I_3^2\omega_\parallel^2. \end{aligned} \tag{28.6}$$

Решив эту систему уравнений относительно $\omega_\perp$ и $\omega_\parallel$, найдем выражения этих величин через T и M:

$$\omega_\parallel = \sqrt{\frac{M^2 - 2TI_1}{I_3(I_3 - I_1)}}, \quad \omega_\perp = \sqrt{\frac{M^2 - 2TI_3}{I_1(I_1 - I_3)}}. \tag{28.7}$$

Допустим, что тело сплюснуто вдоль оси z, тогда $I_3 > I_1$ и знаменатель под корнем в $\omega_\parallel$ будет положительным, а в $\omega_\perp$ — отрицательным. Значит, для того чтобы $\omega_\parallel$ и $\omega_\perp$ были вещественными, необходимо выполнение условий $M^2 - 2TI_1 \geqslant 0$, $M^2 - 2TI_3 \leqslant 0$, которые можно объединить в одну формулу

$$\frac{M^2}{2I_3} \leqslant T \leqslant \frac{M^2}{2I_1}. \tag{28.8}$$

Значений, выходящих за указанные пределы, энергия свободного симметричного волчка иметь не может (при данном M). Если энергия имеет наименьшее возможное значение, т. е. при $M^2 = 2TI_3$, $\omega_\perp$ обращается в нуль (см. (28.7)). Из формулы (28.5) следует, что в этом случае $\vartheta = 0$ — оси Z и z совпадают, направления векторов $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ также совпадают, вектор $\boldsymbol{\omega}$ не перемещается ни относительно тела, ни относительно

системы K. Отметим, что в этом случае имеет место соотношение

$$T = \frac{M^2}{2I_3}. \qquad (28.9)$$

Теперь допустим, что энергия имеет наибольшее возможное значение, т. е. $M^2 = 2TI_1$. Тогда обращается в нуль $\omega_\parallel$ (см. (28.7)). Согласно формуле (28.5) в этом случае $\vartheta = \pi/2$ — оси Z и z взаимно перпендикулярны, вращения вокруг оси z нет, вектор $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\perp$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{M}$, энергия связана с моментом соотношением

$$T = \frac{M^2}{2I_1}. \qquad (28.10)$$

Полученным нами соотношениям можно дать красивую геометрическую интерпретацию. Перепишем формулы (28.6) следующим образом:

$$\frac{\omega_1^2}{2T/I_1} + \frac{\omega_2^2}{2T/I_1} + \frac{\omega_3^2}{2T/I_3} = 1, \qquad (28.11)$$

$$\frac{\omega_1^2}{M^2/I_1^2} + \frac{\omega_2^2}{M^2/I_1^2} + \frac{\omega_3^2}{M^2/I_3^2} = 1. \qquad (28.12)$$

Каждое из этих уравнений есть уравнение эллипсоида вращения. Если, как мы предположили, $I_3 > I_1$, оба эллипсоида сплющены вдоль оси ω_3, которая совпадает с осью z (эллипсоид инерции в этом случае, наоборот, вытянут вдоль оси z). Легко сообразить [1]), что первый эллипсоид (назовем его эллипсоидом энергии) сплющен меньше чем второй (который мы назовем эллипсоидом момента). На рис. 28.3 изображены оба эллипсоида. Значения ω_1, ω_2, ω_3, удовлетворяющие уравнениям (28.11) и (28.12), определяются линиями пересечения обоих эллипсоидов. Отсюда вытекает, что конец вектора $\boldsymbol{\omega}$ должен скользить по этой линии пересечения. Следовательно, вектор $\boldsymbol{\omega}$ вращается относительно осей ω_1, ω_2, ω_3, описывая конус вокруг оси ω_3. Напомним, что ω_i есть проекция $\boldsymbol{\omega}$ на i-ю главную ось инерции тела. Значит, оси ω_i совпадают с осями x, y, z. Таким образом, вращение относительно осей ω_i означает вращение относительно самого тела.

---

[1]) Для этого нужно принять во внимание, что $I_3^2/I_1^2 > I_3/I_1$.

Увеличивая M при неизменном T, можно добиться того, чтобы эллипсоиды энергии и момента имели только две общие точки. Это осуществляется при условии, что $\sqrt{2T/I_3} = M/I_3$ (ср. с (28.9)). В этом случае вектор ω совпадает по направлению с осью z. Если еще увеличить M, т. е. положить $M^2/2I_3 > T$, эллипсоиды перестанут соприкасаться и система уравнений

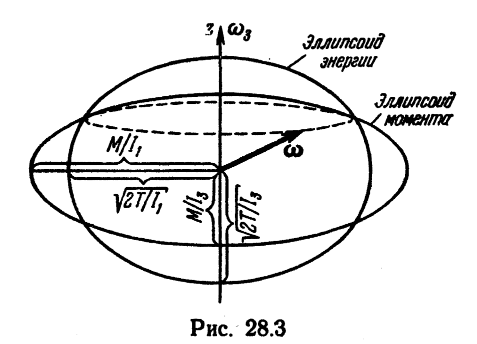


Рис. 28.3

(28.11) и (28.12) не будет иметь общих решений. Такой случай не может реализоваться. Следовательно, мы получили нижнюю границу для T (см. (28.8)).

Уменьшая M при неизменном T, придем к такому положению, когда обе линии пересечения эллипсоидов сольются в одну линию касания, лежащую в экваториальной плоскости. Это осуществляется при условии, что $\sqrt{2T/I_1} = M/I_1$ (ср. с (28.10)). В этом случае вектор ω вращается вокруг оси z, оставаясь все время к ней перпендикулярным. Если еще уменьшить M, т. е. положить $T > M^2/2I_1$, эллипсоиды перестанут соприкасаться и система уравнений (28.11) и (28.12) не будет иметь общих решений. Таким образом, мы приходим к верхней границе для T (см. (28.8)).

§ 29. Симметричный волчок в однородном поле тяжести

Рассмотрим поведение симметричного волчка с одной неподвижной точкой, находящегося в однородном поле тяжести. Отметим, что общее решение[1]) задачи

[1]) То есть решение, получаемое с помощью квадратур при произвольных начальных условиях.

о движении тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести может быть получено только в трех случаях:

1) для асимметричного уравновешенного волчка (волчок называется уравновешенным, если неподвижная точка совпадает с центром инерции тела). Этот случай называется *задачей Эйлера*;

2) для симметричного неуравновешенного волчка (неподвижная точка не совпадает с центром инерции), у которого центр инерции лежит на оси z — *задача Лагранжа*;

3) для симметричного неуравновешенного волчка, у которого $I_1 = I_2 = 2I_3$, а центр инерции лежит в плоскости xy — *задача С. В. Ковалевской.*

Мы рассмотрим задачу Лагранжа. Уравнения движения в этом случае интегрируются очень сложно. Поэтому мы ограничимся написанием исходных уравнений и обсуждением их решений.

Начала обеих координатных систем K и K' поместим в неподвижную точку A волчка (в точку опоры). Ось Z неподвижной системы K направим по вертикали, ось z связанной с волчком системы K' направим вдоль третьей главной оси инерции тела ($I_1 = I_2 \neq I_3$). При таком выборе координатных осей потенциальная энергия волчка имеет вид $U = mgl \cos \vartheta$, где l — расстояние от точки опоры до центра инерции C (предполагаем, что координата z центра инерции, т. е. z_C больше нуля).

Найдем выражение кинетической энергии для данного случая. Учтя, что точка A неподвижна, напишем

$$T = {}^1/_2 \sum_a m_a \left[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_a^{(A)}\right]^2$$

и проделаем те же преобразования, какие мы выполнили для выражения (23.3). В итоге мы придем к формуле, которая будет отличаться от (23.5) лишь тем, что вместо координат x_{ia}, x_{ka} и т. д. в ней будут стоять координаты $x_{ia}^{(A)}$, $x_{ka}^{(A)}$ и т. д. Следовательно, для кинетической энергии получится выражение, аналогичное (23.8):

$$T = {}^1/_2 \sum_{i,k} I_{ik}^{(A)} \omega_i \omega_k,$$

где $I_{ik}^{(A)}$ — компоненты тензора, определяемые по формуле (23.16). Согласно (23.18) эти компоненты равны

$$I_{ik}^{(A)} = I_{ik} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right).$$

В нашем случае $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -a = -l$ (a_i — есть i-я координата точки A в системе $K'_{(C)}$; см. (23.17)). Кроме того, поскольку ось z совпадает с третьей главной осью инерции, а оси x и y параллельны двум другим главным осям[1]), $I_{ik} = I_i\delta_{ik}$. Отсюда можно заключить, что тензор $I_{ik}^{(A)}$ будет диагональным, причем отличные от нуля компоненты его равны

$$I_1^{(A)} = I_1 + ml^2, \quad I_2^{(A)} = I_2 + ml^2, \quad I_3^{(A)} = I_3.$$

Таким образом, учтя, что $I_1 = I_2$, получим для кинетической энергии следующее выражение:

$$T = {}^1/_2\left\{\left(I_1 + ml^2\right)\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + I_3\omega_3^2\right\}.$$

Подставив в это выражение значения (22.4) для компонент $\boldsymbol{\omega}$, получим

$$T = {}^1/_2\left\{(I_1 + ml^2)(\dot\varphi^2\sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2) + I_3(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2\right\}.$$

Напишем функцию Лагранжа[2]):

$$L = {}^1/_2(I_1 + ml^2)(\dot\varphi^2\sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2) + {}^1/_2 I_3(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2 - mgl\cos\vartheta. \quad (29.1)$$

Координаты φ и ψ являются циклическими (см. § 11, текст, связанный с формулой (11.2)). Поэтому обобщенные импульсы p_φ и p оказываются интегралами движения. Третьим интегралом движения является энергия E. Итак, мы имеем три уравнения:

$$p_\varphi = \partial L/\partial\dot\varphi = [(I_1 + ml^2)\sin^2\vartheta + I_3\cos^2\vartheta]\,\dot\varphi + I_3\cos\vartheta\,\dot\psi = M_Z = \text{const},$$

$$p_\psi = \partial L/\partial\dot\psi = I_3(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\varphi) = M_z = \text{const}\ ^{3)},$$

$$E = T + U = \text{const}.$$

---

[1]) У симметричного волчка любые две взаимно перпендикулярные оси, перпендикулярные к оси симметрии, могут служить главными осями инерции.

[2]) Сила, приложенная к волчку в точке опоры, есть реакция связи, которая, как нам известно, в уравнения Лагранжа не входит.

[3]) Ср. с (26.9).

Анализ решений этих уравнений приводит к следующим результатам. Угол ϑ изменяется периодически в пределах от ϑ_1 до ϑ_2, определяемых начальными условиями (в частности, соотношением между энергией и моментом импульса волчка). Колебания оси волчка, отвечающие изменениям угла ϑ, называются *нутацией*. Одновременно ось волчка прецессирует, т. е. поворачивается вокруг оси Z. В итоге апекс, т. е. точка пересечения оси z (оси волчка) со сферой единичного

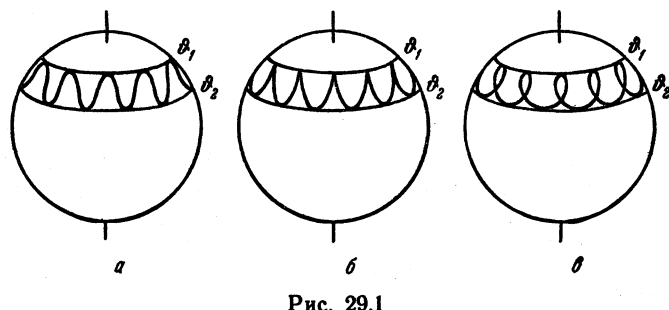


Рис. 29.1

радиуса, вычерчивает одну из кривых, изображенных на рис. 29.1. Знак производной $\dot{\varphi}$ либо остается неизменным (рис. 29.1, *а* и *б*), либо меняется (рис. 29.1, *в*). Случай *б*) имеет место, когда $\dot{\varphi}$ и $\dot{\vartheta}$ одновременно обращаются в нуль.

Характер поведения $\dot{\varphi}$, как и значения ϑ_1 и ϑ_2, зависит от начальных условий. Такое движение оси волчка, как в случае *б*), соответствует естественным начальным условиям, при которых волчок сначала приводится во вращение вокруг своей оси, после чего ось освобождается и начинает свое движение. В момент освобождения оси и $\dot{\varphi}$, и $\dot{\vartheta}$ равны нулю. При этих начальных условиях волчок сначала наклоняется, а по достижении граничного угла ϑ_2 начинает подниматься (см. рис. 29.1, *б*).

При совершенно специфических начальных условиях оба граничные значения ϑ_1 и ϑ_2 совпадают, так что ось волчка прецессирует без нутации. Такая прецессия называется, как мы уже отмечали, регулярной. Чтобы получить регулярную прецессию, нужно сообщить волчку начальный толчок вполне определенной величины и направления.

В случае «быстрого» волчка (т. е. в случае, когда кинетическая энергия собственного вращения волчка велика по сравнению с его энергией в поле тяжести) действием сил тяжести можно в первом приближении пренебречь. Следовательно, движение волчка можно представить как рассмотренную в предыдущем параграфе свободную прецессию оси волчка вокруг направления момента **M** (эта прецессия соответствует нутации тяжелого волчка), на которую накладываются малые возмущения, обусловленные действием силы тяжести. Эти возмущения вызывают медленную прецессию момента **M** вокруг вертикали.

Расчет показывает, что чем быстрее вращается волчок, тем меньше амплитуда нутации. Кроме того, у реального быстрого волчка нутация погашается трением в опоре. Поэтому практически нутация достаточно быстрого волчка бывает незаметной и волчок представляется равномерно прецессирующим вокруг вертикальной оси. Так как подобная прецессия является регулярной только приближенно, то она получила название псевдорегулярной прецессии.

Глава VI

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 30. Уравнения Гамильтона

При решении задач о движении системы с s степенями свободы с помощью уравнений Лагранжа приходится решать систему s дифференциальных уравнений второго порядка. Независимыми переменными в этих уравнениях являются обобщенные координаты q_k и обобщенные скорости $\dot{q}_k$.

Гамильтон получил уравнения движения, в которых независимыми переменными являются обобщенные координаты q_k и обобщенные импульсы p_k. Уравнения Гамильтона или, как их еще называют, канонические[1]) уравнения (соответственно q_k и p_k называются каноническими переменными), в отличие от уравнений Лагранжа, являются дифференциальными уравнениями первого порядка. Но зато число их, необходимое для описания системы с s степенями свободы, оказывается равным $2s$.

Уравнения Гамильтона можно вывести либо из уравнений Лагранжа, либо непосредственно из принципа наименьшего действия (ниже мы приведем оба вывода). Естественно, что они не дают ничего нового по существу. Однако канонические уравнения симметричнее уравнений Лагранжа и, кроме того, будучи инвариантными по отношению к каноническим преобразованиям, они открывают большие возможности

---

[1]) Уравнения Гамильтона называются каноническими в связи с тем, что они остаются инвариантными при весьма общих преобразованиях переменных. С помощью таких канонических преобразований можно перейти от переменных q_k и p_k к другим каноническим переменным $Q_l(q_k, p_k, t)$ и $P_l(q_k, p_k, t)$. При этом уравнения Гамильтона сохраняют свою форму, правда, с некоторой новой функцией Гамильтона $H'(Q_l, P_l, t)$, которая заменяет функцию $H(q_k, p_k, t)$. Переменные Q_l и P_l могут иметь другой физический смысл, чем переменные q_k и p_k.

для обобщений, играющих важную роль в электродинамике, статистической физике и квантовой механике.

В качестве функции, характеризующей механическую систему, Гамильтон взял энергию (5.1), выраженную через переменные q_k и p_k. Учтя, что

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{30.1}$$

(см. (4.19)), запишем эту функцию следующим образом:

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t) \tag{30.2}$$

($\dot{q}_k$ предполагаются выраженными через q_k и p_k). Характеристическую функцию H называют *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом.*

В качестве примера приведем гамильтониан частицы, движущейся в потенциальном поле $U = U(x, y, z, t)$:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z, t). \tag{30.3}$$

Для частицы, движущейся в стационарном поле, H имеет тот же вид, но U не зависит явно от t.

Выведем уравнения Гамильтона, исходя из уравнений Лагранжа. С этой целью найдем полные дифференциалы левой и правой частей формулы (30.2) и приравняем эти дифференциалы друг другу. Полный дифференциал левой части равен

$$dH = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{30.4}$$

Дифференциал же правой части имеет вид

$$dH = \sum_k p_k d\dot{q}_k + \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{30.5}$$

В силу соотношения (30.1) первая и четвертая суммы взаимно уничтожаются. Из уравнения Лагранжа

(4.16) [1]) следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}=\dot p_k. \tag{30.6}$$

Заменим в третьей сумме формулы (30.5) $\partial L/\partial q_k$ через $\dot p_k$. В итоге выражение (30.5) примет вид

$$dH=\sum_k \dot q_k\,dp_k-\sum_k \dot p_k\,dq_k-\frac{\partial L}{\partial t}dt. \tag{30.7}$$

Для того чтобы выражения (30.4) и (30.7) были равны при произвольных dq_k, dp_k и dt, необходимо выполнение условий:

$$\dot q_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \dot p_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{30.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{30.9}$$

Уравнения (30.8) суть искомые уравнения Гамильтона или канонические уравнения. Они, как уже отмечалось, являются дифференциальными уравнениями первого порядка. Общее число их равно $2s$.

Для частицы, описываемой гамильтонианом (30.3), уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot p_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad \dot x=\frac{p_x}{m}\quad \text{и т. д.}$$

Теперь получим уравнения Гамильтона из принципа наименьшего действия. Напомним, что согласно этому принципу система движется так, что действие S (см. (7.1)) имеет наименьшее возможное значение. Это утверждение записывается в виде

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_k,\ \dot q_k,\ t)\,dt=0.$$

Подставим сюда значение L, получающееся из соотношения (30.2):

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_k p_k\dot q_k-H\Big)dt=0. \tag{30.10}$$

---

[1]) Мы предполагаем, что все силы, действующие в системе, потенциальны, поэтому используем уравнение (4.16), а не (4.15).

Вариацию, стоящую в левой части (30.10), можно представить в виде

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt.$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_k \delta \dot{q}_k \, dt = p_k \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_k \delta q_k \, dt$$

(мы воспользовались тем, что $\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt}(\delta q_k)$; см. формулу (III.4)). Вариации δq_k при подстановке пределов интегрирования обращаются в нуль[1]). Поэтому первый член полученного выражения нужно отбросить. Следовательно, условие (30.10) запишется так:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left\{ \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k - \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right\} dt = 0$$

В силу произвольности вариаций δq_k и δp_k это условие может выполняться только в случае, если выражения в круглых скобках будут нулями. Отсюда сразу получаются уравнения (30.8).

Исследуем функцию Гамильтона H. Найдем полную производную от этой функции по времени

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k.$$

Приняв во внимание значения (30.8) для $\dot{q}_k$ и $\dot{p}_k$, получим, что

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{30.11}$$

Таким образом, если функция H не зависит явно от времени, она сохраняет свое значение. Этого следовало ожидать, поскольку H есть полная энергия системы, которая сохраняется при условии, что $\partial L / \partial t = 0$ (см. (30.9)).

---

[1]) Напомним, что при варьировании траекторий в конфигурационном пространстве (см. § 4) начальная и конечная точки этих траекторий предполагаются закрепленными.

Заменим во втором из уравнений (30.8) $\dot{p}_k$ в соответствии с (30.6). В результате найдем, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}. \tag{30.12}$$

Отсюда следует, что те обобщенные координаты, которые являются циклическими, т. е. не входят явно в функцию L, не войдут явно и в функцию H. Выше (см. (11.2)) мы установили, что обобщенные импульсы, соответствующие циклическим координатам, являются интегралами движения. Из сказанного можно заключить, что обобщенные импульсы, соответствующие координатам q_k, не входящим явно в гамильтониан (т. е. циклическим относительно функции H), остаются постоянными

$$p_k = \text{const} \quad \text{при условии, что} \quad \partial H/\partial q_k = 0. \tag{30.13}$$

§ 31. Скобки Пуассона

Возьмем некоторую функцию канонических переменных q_k и p_k, а также времени t, т. е. $f(q_k, p_k, t)$ и выясним, при каких условиях эта функция будет интегралом движения[1]). Для этого вычислим полную производную от этой функции по времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

Заменим производные $\dot{q}_k$ и $\dot{p}_k$ их значениями (30.8):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right). \tag{31.1}$$

Если есть две функции $\varphi(q_k, p_k, t)$ и $\psi(q_k, p_k, t)$, то выражение

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right) \tag{31.2}$$

называют *скобками Пуассона* для функций φ и ψ[2]). В случае необходимости при символе скобок Пуассона

---

[1]) Напомним, что интегралами движения называются такие функции динамических переменных (q_k и $\dot{q}_k$ либо q_k и p_k), которые остаются постоянными при движении системы.

[2]) Для обозначения скобок Пуассона используются иногда вместо фигурных квадратные и даже круглые скобки.

указывают в виде индексов независимые переменные, по которым берутся частные производные, т. е. записывают, например, скобки (31.2) так: $\{\varphi, \psi\}_{q,p}$. Легко видеть, что

$$\{\varphi, \psi\}_{q,p} = -\{\varphi, \psi\}_{p,q} = \{\psi, \varphi\}_{p,q}. \tag{31.3}$$

Применив скобки Пуассона, выражение (31.1) можно представить в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_{q,p} \tag{31.4}$$

или в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}_{p,q}. \tag{31.5}$$

Из (31.4) следует, что условие, при котором функция f будет интегралом движения, выглядит так:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0. \tag{31.6}$$

Отсюда заключаем, что в случае, когда интеграл движения f не зависит от времени явно, его скобки Пуассона с функцией Гамильтона равны нулю.

Приведем некоторые очевидные свойства скобок Пуассона:

$$\{\varphi, \psi\} = -\{\psi, \varphi\}, \tag{31.7}$$

$$\{\varphi, \varphi\} = 0, \tag{31.8}$$

$$\{(\varphi_1 + \varphi_2), \psi) = \{\varphi_1, \psi\} + \{\varphi_2, \psi\}, \tag{31.9}$$

$$\{(\varphi_1 \varphi_2), \psi\} = \varphi_1 \{\varphi_2, \psi\} + \varphi_2 \{\varphi_1, \psi\}, \tag{31.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\varphi, \psi\} = \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right\} + \left\{\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right\}. \tag{31.11}$$

В частности, в качестве φ или ψ, либо их обеих можно взять канонические переменные. Тогда получаются следующие соотношения:

$$\{q_i, \psi\} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, \tag{31.12}$$

$$\{p_i, \psi\} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \tag{31.13}$$

$$\{q_i, q_k\} = 0, \tag{31.14}$$

$$\{p_i, p_k\} = 0, \tag{31.15}$$

$$\{q_i, p_k\} = \delta_{ik}. \tag{31.16}$$

Рекомендуем получить формулы (31.12)—(31.16) в порядке упражнения. При их выводе следует учесть, что $\partial p_i/\partial q_k = 0$; $\partial q_i/\partial p_k = 0$ (так как q_k и p_k — независимые переменные).

Очень важным свойством скобок Пуассона является их инвариантность относительно канонических преобразований. Это означает, что

$$\{\varphi, \psi\}_{q,p} = \{\varphi, \psi\}_{Q,P}, \tag{31.17}$$

где Q, P — переменные, полученные из q, p с помощью канонических преобразований.

В квантовой механике мы познакомимся с квантовыми скобками Пуассона, которые являются квантовомеханическим аналогом рассмотренных в этом параграфе классических скобок Пуассона.

§ 32. Уравнение Гамильтона — Якоби

Варьирование действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{32.1}$$

при нахождении истинной траектории движения системы (имеется в виду траектория в конфигурационном пространстве, т. е. в пространстве s измерений; s — число степеней свободы системы) заключается в сравнении значений S для близких траекторий с закрепленными концами, т. е. с одинаковыми значениями $q_k(t_1) = q_k^{(1)}$ и $q_k(t_2) = q_k^{(2)}$. Наглядно это можно представить с помощью рис. 32.1. Лишь та траектория, для которой S минимально, отвечает действительному движению (на рисунке она изображена сплошной линией).

В этом параграфе мы будем рассматривать действие S как величину, характеризующую движение по истинным траекториям, и исследуем, как эта величина ведет себя при изменениях точки $q^{(2)}$ (при $t_2 = \text{const}$), а также при изменениях t_2 (символ $q^{(2)}$ означает совокупность всех $q_k^{(2)}$). Таким образом, мы будем обращаться с действием как с функцией:

$$S = S(q_k, t), \tag{32.2}$$

где q_k — координаты конечного положения системы, а t — момент времени, когда это положение достигается.

Возьмем вблизи точки $q^{(2)}$ точку с координатой $q^{(2)}+\delta q$, в которую система попадает в тот же момент времени t_2, в который она приходит в точку $q^{(2)}$ (рис. 32.2). Действие для траектории, приводящей систему в точку $q^{(2)}+\delta q$, отличается от действия для

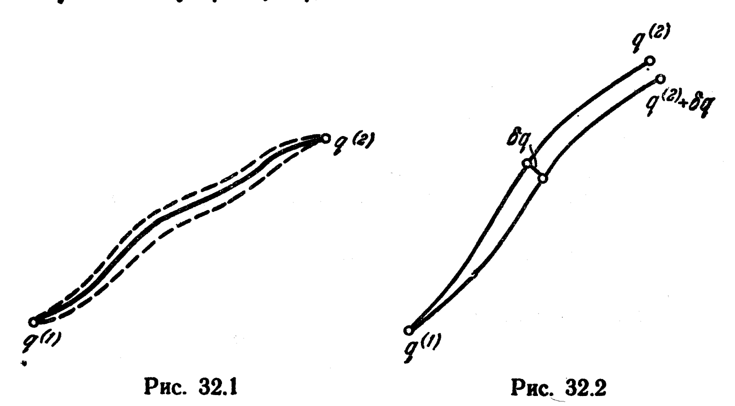


Рис. 32.1

Рис. 32.2

траектории, по которой система приходит в точку $q^{(2)}$, на величину

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta\dot q_k\right)dt. \qquad (32.3)$$

Здесь δq_k есть разность значений q_k, взятых для обеих траекторий в один и тот же момент времени t; аналогично $\delta\dot q_k$ — разность $\dot q_k$ в момент t.

Проинтегрируем по частям второе слагаемое в (32.3):

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta\dot q_k\,dt=\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta q_k\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)\delta q_k\,dt. \qquad (32.4)$$

Для истинной траектории $\partial L/\partial\dot q_k$ представляет собой обобщенный импульс p_k. Начала обеих траекторий совпадают, поэтому $\delta q_k(t_1)=0$. Величину $\delta q_k(t_2)$ можно обозначить просто δq_k. Следовательно, первый член в правой части (32.4) можно представить в виде $p_k\delta q_k$.

Подставим (32.4) в выражение (32.3):

$$\delta S=\sum_k p_k\delta q_k+\int_{t_1}^{t_2}\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)\delta q_k\,dt.$$

Истинные траектории удовлетворяют уравнениям Лагранжа. Поэтому подынтегральная функция, а значит, и сам интеграл будет нулем. Таким образом, мы получаем для приращения действия S, обусловленного изменением координат конечного положения системы на δq_k (при неизменном времени движения), значение

$$\delta S=\sum_k p_k\delta q_k. \qquad (32.5)$$

Здесь p_k — величина импульса в момент t_2.

Из выражения (32.5) вытекает, что

$$\frac{\partial S}{\partial q_k}=p_k. \qquad (32.6)$$

Следовательно, частные производные от действия по обобщенным координатам равны соответствующим обобщенным импульсам.

Теперь допустим, что верхний предел интегрирования в (32.1) не фиксирован. Чтобы подчеркнуть это, запишем действие в виде

$$S=\int_{t_1}^{t}L\,dt. \qquad (32.7)$$

Представленное так действие является функцией верхнего предела интегрирования, т. е. $S=S(t)$. Из (32.7) следует, что

$$\frac{dS}{dt}=L. \qquad (32.8)$$

Вместе с тем, в соответствии с (32.2) можно написать, что

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_k\frac{\partial S}{\partial q_k}\dot q_k=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_k p_k\dot q_k \qquad (32.9)$$

(мы учли соотношение (32.6)). Приравняв правые части выражений (32.8) и (32.9), получим для частной

производной от S по t значение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left(\sum_k p_k \dot{q}_k - L\right).$$

Выражение в скобках есть гамильтониан H. Следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q_k, p_k, t). \qquad (32.10)$$

В соответствии с формулами (32.6) и (32.10) дифференциал функции (32.2) можно представить в виде

$$dS = \sum_k p_k\, dq_k - H\, dt. \qquad (32.11)$$

Заменим в уравнении (32.10) p_k их значениями из (32.6) и запишем это уравнение следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0. \qquad (32.12)$$

Мы получили дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $S(q_1, q_2, \ldots, q_s; t)$. Его называют *уравнением Гамильтона — Якоби*. Оно является уравнением в частных производных первого порядка.

Уравнение (32.12) лежит в основе некоторого общего метода интегрирования уравнений движения. Однако рассмотрение этого метода выходит за рамки нашего курса.

В случае консервативной системы со стационарными связями время не входит явно в функцию H и $H = E = \text{const}$ (см. (30.9)). Поэтому согласно (32.10) зависимость S от t выражается слагаемым $-Et$. Следовательно, действие распадается на два члена, один из которых зависит только от обобщенных координат, а другой — только от времени

$$S(q_k, t) = S_0(q_k) - Et. \qquad (32.13)$$

Функцию $S_0(q_k)$ называют *укороченным действием*. Подставив S в виде (32.13) в уравнение (32.12), придем к уравнению Гамильтона — Якоби для укороченного действия

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \qquad (32.14)$$

Уравнение Гамильтона — Якоби играет важную роль в оптике и квантовой механике. Оно лежит в основе оптико-механической аналогии, которая привела Шредингера к формулированию волновой механики.

Напишем уравнение Гамильтона — Якоби для частицы, движущейся в нестационарном потенциальном поле. Приняв во внимание формулы (30.3) и (32.12), получим

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+ \\ +U(x, y, z, t)=-\frac{\partial S}{\partial t}. \qquad (32.15)$$

Если поле, в котором движется частица, стационарно, вместо (32.15) рассматривается уравнение для укороченного действия S_0

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2\right\}+U(x, y, z)=E. \qquad (32.16)$$

Глава VII

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 33. Принцип относительности

Основу специальной теории относительности образуют два постулата, сформулированные Эйнштейном:

1. *Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.* Иначе можно сказать, что *уравнения, выражающие законы природы, инвариантны*[1]) *по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.*

2. *Свет в пустоте всегда распространяется с определенной постоянной скоростью c, не зависящей от состояния движения излучающего тела.*

Первый постулат носит название *принципа относительности Эйнштейна*, второй постулат называют *принципом постоянства скорости света.*

Ньютоновская механика исходит из предположения о мгновенной передаче взаимодействий от одних тел к другим. Это, в частности, проявляется в том, что взаимодействие частиц описывается с помощью потенциальной энергии $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots)$, которая зависит только от координат частиц. Тем самым предполагается, что изменение положения одной из частиц отражается на остальных частицах в тот же момент.

В действительности, как показывает опыт, мгновенных взаимодействий в природе не существует. Если изменяется положение одной из частиц, то на другой взаимодействующей с ней частице это изменение начнет сказываться спустя конечный промежуток времени, необходимый для того, чтобы распространяющееся с конечной скоростью взаимодействие прошло

---

[1]) Инвариантность уравнения означает неизменность вида уравнения при замене в нем координат и времени одной системы отсчета координатами и временем другой системы.

путь, равный расстоянию между частицами. Таким образом нужно признать существование предельной скорости распространения взаимодействий. Из опыта следует, что эта скорость равна c — скорости света в пустоте.

Из второго постулата вытекает также, что скорость распространения взаимодействий одинакова во всех инерциальных системах отсчета, т. е. является универсальной постоянной.

Согласно механическому принципу относительности Галилея законы механики инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея:

$$x = x' + v_0 t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \qquad (33.1)$$

(v_0 — скорость движения системы K' по отношению к системе K). Из этих преобразований вытекает классический закон сложения скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0. \qquad (33.2)$$

Последнее соотношение, а следовательно, и уравнения (33.1), из которых оно вытекает, не согласуется со вторым постулатом Эйнштейна, согласно которому для светового сигнала $c = c'$.

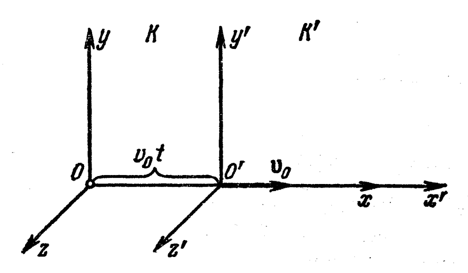


Рис. 33.1

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K'. Координатные оси этих систем выберем так, чтобы оси x и x' были направлены вдоль скорости $\mathbf{v}_0$ системы K', а оси y и z были параллельны осям y' и z' (рис. 33.1). Отсчет времени в обеих системах начнем с того момента, когда начала систем совпадали. Пусть в момент $t = t' = 0$ из совпадающих начал координат был послан световой сигнал, распространяющийся по всем направлениям. К моменту времени t

сигнал в системе K достигнет точек, отстоящих от O на расстояние $l = ct$. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \qquad (33.3)$$

Аналогично, к моменту времени t' сигнал в системе K' достигнет точек сферы радиуса ct'. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \qquad (33.4)$$

Уравнения (33.3) и (33.4) имеют одинаковый вид, что является проявлением инвариантности закона распространения света по отношению к преобразованию координат и времени от одной системы к другой. Если подставить в (33.3) значения нештрихованных координат и времени, определяемые формулами (33.1), получается соотношение

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 - 2v_0x't' - v_0^2t'^2 = 0,$$

не совпадающее с (33.4). Следовательно, мы снова пришли к выводу, что преобразования Галилея не совместимы с принципом постоянства скорости света.

Согласно принципу относительности Эйнштейна все законы природы, в том числе законы механики и электродинамики, должны быть инвариантными по отношению к одним и тем же преобразованиям координат и времени, осуществляемым при переходе от одной системы отсчета к другой. Однако уравнения Ньютона и уравнения Максвелла этому требованию не удовлетворяют. В то время как уравнения Ньютона инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея, уравнения Максвелла, как легко убедиться непосредственной проверкой, по отношению к этим преобразованиям оказываются не инвариантными. Это обстоятельство привело Эйнштейна к выводу о том, что уравнения Ньютона нуждаются в уточнении, в результате которого законы механики и электродинамики оказались бы инвариантными по отношению к одним и тем же преобразованиям. Необходимое видоизменение законов механики было осуществлено Эйнштейном. В результате возникла механика, согласующаяся с принципом относительности Эйнштейна.

которая получила название *релятивистской механики.* Изложению основ этой механики и посвящена эта глава.

§ 34. Интервал

Событие, происходящее с некоторой частицей, характеризуется местом, где оно произошло (т. е. совокупностью значений x, y, z), и временем t, когда оно произошло. Если ввести воображаемое четырехмерное пространство (4-пространство), по осям которого откладываются пространственные координаты x, y, z и время t (или пропорциональная t величина), то событие изобразится в этом пространстве точкой. Точка, изображающая событие в 4-пространстве, называется *мировой точкой.* С течением времени мировая точка, соответствующая данной частице, перемещается в 4-пространстве, описывая некоторую линию, которую называют *мировой линией.*

Рассмотрим два события, первое из которых заключается в испускании светового сигнала из точки с координатами x_1, y_1, z_1 в момент времени t_1, а второе — в приходе этого сигнала в точку с координатами x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2. Между координатами и временем этих двух событий имеется следующее соотношение:

$$c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2=0. \quad (34.1)$$

Величина

$$l_{12}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad (34.2)$$

представляет собой квадрат расстояния (интервала) между двумя точками в обычном пространстве. Аналогично можно говорить о расстоянии (интервале) между двумя точками в 4-пространстве. *Интервалом* между двумя событиями называют величину s_{12}, квадрат которой определяется формулой

$$s_{12}^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2=$$
$$=c^2(t_2-t_1)^2-l_{12}^2. \quad (34.3)$$

Для двух бесконечно близких событий квадрат интервала имеет вид

$$ds^2=c^2dt^2-dl^2. \quad (34.4)$$

Для двух событий, заключающихся в испускании светового сигнала в одной точке и приходе его в другую точку, интервал равен нулю:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = 0 \tag{34.5}$$

(см. формулу (34.1)). Вследствие постоянства скорости света равенство (34.1) должно быть справедливо в любой инерциальной системе отсчета. Следовательно, если интервал равен нулю в системе K, то он будет равен нулю и в любой другой системе K'.

Итак, интервал должен обращаться в нуль одновременно во всех системах отсчета. Отсюда вытекает, что интервал Δs между некоторыми событиями, выраженный в системе K, должен быть связан с интервалом $\Delta s'$ между теми же событиями, выраженным в системе K', соотношением

$$\Delta s = a\,\Delta s'. \tag{34.6}$$

Но в силу полной равноправности систем K и K' можно с тем же основанием написать, что

$$\Delta s' = a\,\Delta s, \tag{34.7}$$

где a имеет то же значение, что и в формуле (34.6).

Перемножив соотношения (34.6) и (34.7), найдем, что

$$a^2 = 1,$$

откуда $a = \pm 1$. Естественно предположить, что знак интервала во всех системах отсчета должен быть одинаков. Поэтому значение a, равное -1, нужно отбросить. Таким образом, мы приходим к выводу, что интервал между двумя событиями есть инвариант:

$$\Delta s = \Delta s'. \tag{34.8}$$

Полученный нами результат свидетельствует о целесообразности принятого нами определения интервала между двумя точками 4-пространства. Интервал, определяемый формулой (34.3), оказывается инвариантным по отношению к преобразованиям координат и времени от одной системы отсчета к другой, т. е. ведет себя подобно расстоянию (34.2) между двумя точками в обычном пространстве.

Подчеркнем, что вывод об инвариантности величины (34.3) является логическим следствием из постулатов Эйнштейна.

Основываясь на инвариантности интервала, можно написать

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta l'^2. \qquad (34.9)$$

Допустим, что $\Delta s^2 > 0$, т. е. интервал вещественный. Тогда можно найти такую систему отсчета K', в которой $\Delta l'$ будет равен нулю. В этой системе события, разделенные интервалом Δs, произойдут в одной точке. Промежуток времени между событиями в системе K' равен

$$\Delta t' = \frac{\Delta s}{c}. \qquad (34.10)$$

Вещественные интервалы называются *времениподобными.*

Теперь допустим, что $\Delta s^2 < 0$, т. е. интервал мнимый. Тогда можно найти такую систему отсчета K', в которой $\Delta t' = 0$, т. е. события происходят одновременно. Расстояние между точками, в которых произошли события в системе K', равно

$$\Delta l' = i\,\Delta s. \qquad (34.11)$$

Мнимые интервалы называются *пространственноподобными.*

События, происходящие с одной и той же частицей, могут быть разделены лишь времениподобным интервалом. Действительно, поскольку частица не может двигаться со скоростью, большей c, пройденное ею за время Δt расстояние Δl не может превзойти $c\Delta t$, т. е. $\Delta l \leqslant c\Delta t$. Отсюда $\Delta s^2 \geqslant 0$.

Пространственноподобным интервалом могут быть разделены лишь причинно не связанные события. Действительно, если $\Delta s^2 < 0$, то $\Delta l > c\Delta t$. Следовательно, никакое воздействие, вышедшее из одной точки пространства, не может достигнуть за время Δt другой точки и оказать влияние на событие, происходящее в этой точке.

Рассмотрим некоторую частицу, движущуюся равномерно со скоростью v относительно системы K (лабораторной системы). Пусть с этой частицей происходят два события, разделенные промежутком времени, который в системе K равен dt. Введем систему K', относительно которой частица покоится. В этой системе промежуток времени между рассмат-

риваемыми событиями будет равен

$$dt' = \frac{ds}{c}$$

(см. (34.10)).

Легко видеть, что промежуток времени dt' измерен часами, движущимися относительно K вместе с частицей. Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с телом, называется *собственным временем* этого тела. Обозначив собственное время буквой τ, можно написать

$$d\tau = \frac{ds}{c}. \qquad (34.12)$$

Поскольку ds есть инвариант, а c — константа, собственное время $d\tau$ оказывается инвариантом.

Найдем связь между собственным временем $d\tau$ и временем dt, измеренным по часам системы K, относительно которой частица и связанные с ней (собственные) часы движутся со скоростью v. Для этого подставим в (34.12) выражение ds через координаты и время системы K:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2\,dt^2 - dl^2}}{c}$$

(см. формулу (34.4)). Преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$d\tau = dt\,\sqrt{1 - \frac{(dl/dt)^2}{c^2}}\,.$$

Но dl/dt есть скорость частицы v. Таким образом,

$$d\tau = dt\,\sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (34.13)$$

Из (34.13) заключаем, что собственное время частицы всегда меньше соответствующего промежутка времени в неподвижной (лабораторной) системе.

Формула (34.13) получена нами для случая равномерного движения частицы. Однако она оказывается справедливой и в случае неравномерного движения. Следовательно, для конечных промежутков времени

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2}\,dt, \qquad (34.14)$$

где $v = v(t)$ — скорость тела, для которого вычисляется собственное время.

§ 35. Преобразования Лоренца

В предыдущем параграфе мы установили, что интервал Δs между двумя точками в 4-пространстве является инвариантом, т. е. ведет себя подобно модулю вектора в евклидовом пространстве. Это дает основание рассматривать Δs как модуль («длину») 4-вектора, проведенного из одной мировой точки в другую.

Если ввести обозначения

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \tag{35.1}$$

то квадрат интервала примет вид

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2.$$

Для расстояния Δl между двумя точками в евклидовом пространстве имеет место соотношение

$$\Delta l^2 = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2,$$

т. е. Δl равно модулю разности радиусов-векторов точек. Аналогично интервал Δs можно представить как модуль разности 4-радиусов-векторов соответствующих мировых точек. Следовательно, координаты x^0, x^1, x^2, x^3 суть компоненты 4-радиуса-вектора мировой точки. Квадрат модуля этого радиуса-вектора равен

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Сравнение последнего выражения с формулой (XII. 5) показывает, что пространство, в котором событие изображается мировой точкой с координатами (35.1), обладает псевдоевклидовой метрикой, определяемой тензором (XII. 4).

Следовательно, квадрат 4-радиуса-вектора может быть представлен в виде

$$x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu \tag{35.2}$$

(см. формулу (XII. 31)).

Преобразование компонент 4-радиуса-вектора осуществляется по формуле

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \alpha_\nu^\mu x^\nu. \tag{35.3}$$

Возьмем в качестве координатных систем K и K' в псевдоевклидовом пространстве две инерциальные системы отсчета. Оси этих систем направим в соответствии с рис. 33.1. Тогда, как показано в Приложении XII, матрица коэффициентов преобразования выглядит следующим образом (см. (XII. 21)):

$$[\alpha^{\mu}_{\nu}] = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{35.4}$$

причем

$$\alpha_0^2 - \alpha_1^2 = 1 \tag{35.5}$$

(см. формулу (XII. 22)).

Коэффициенты α_0 и α_1 могут зависеть только от относительной скорости систем v_0. Чтобы найти вид этой зависимости, напишем формулу (35.3) для x'^1. Приняв во внимание (35.4), получим

$$x'^1 = \alpha_1 x^0 + \alpha_0 x^1.$$

Заменим x'^1 через x', x^0 — через ct и x^1 — через x (см. (35.1)):

$$x' = \alpha_1 ct + \alpha_0 x. \tag{35.6}$$

Напишем полученное выражение для точки O' — начала координат системы K' (см. рис. 33.1). Для этой точки $x' = 0$, а $x = v_0 t$. Подстановка в (35.6) дает

$$0 = \alpha_1 ct + \alpha_0 v_0 t,$$

откуда

$$\alpha_1 = -\alpha_0 \frac{v_0}{c}. \tag{35.7}$$

Подставив это значение α_1 в соотношение (35.5), найдем, что

$$\alpha_0^2 (1 - v_0^2/c^2) = 1$$

или

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \tag{35.8}$$

Из (35.7) получим, что

$$\alpha_1 = \frac{-v_0/c}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \tag{35.9}$$

Таким образом, матрица (35.4) в интересующем нас случае будет иметь вид

$$[\alpha^\mu_\nu] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{35.10}$$

Мы ввели обозначение

$$\beta = \frac{v_0}{c}. \tag{35.11}$$

Таблица обратного преобразования $[\bar{\alpha}^\mu_\nu]$ отличается от (35.10) лишь тем, что перед β в числителе стоит знак плюс (см. матрицу (XII.23)).

Подстановка найденных нами значений α^μ_ν в (35.3) приводит к формулам преобразования компонент 4-радиуса-вектора:

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'^1 = \frac{-\beta x^0 + x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3. \tag{35.12}$$

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$x^0 = \frac{x'^0 + \beta x'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^1 = \frac{\beta x'^0 + x'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3. \tag{35.13}$$

Перейдя в формулах (35.12) и (35.13) к обычным обозначениям t, x, y, z, получим

$$t' = \frac{t - (v_0/c^2)\,x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y; \quad z' = z. \tag{35.14}$$

$$t = \frac{t' + (v_0/c^2)\,x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{35.15}$$

Формулы (35.14) и (35.15) называются *преобразованиями Лоренца*. Предоставляем читателю убедиться

в том, что эти преобразования оставляют инвариантным интервал s_{12} между двумя событиями.

Формулы обратного преобразования (35.15) отличаются от формул прямого преобразования (35.14) только знаком при v_0. Этого следовало ожидать, приняв во внимание полную равноправность обеих систем отсчета, а также то обстоятельство, что для данных K и K' проекции скорости относительного движения на оси x и x' отличаются знаком. Действительно, если скорость системы K' относительно системы K направлена вправо (и ее проекция на ось x положительна), то скорость системы K относительно K' направлена влево (и ее проекция на ось x' отрицательна).

При скоростях v_0 настолько малых, что отношением v_0/c можно пренебречь по сравнению с единицей, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

Из преобразований Лоренца можно получить формулы преобразования длин и промежутков времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (это делается в любом курсе общей физики). Мы ограничимся тем, что напомним формулу для лоренцева сокращения длины тела (в направлении его движения):

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{35.16}$$

Здесь l_0 — собственная длина тела, например стержня (т. е. длина тела в той системе отсчета, в которой оно покоится), l — длина тела в системе отсчета, относительно которой оно движется со скоростью v.

Поскольку поперечные размеры тела при его движении не изменяются, объем тела уменьшается в соответствии с формулой

$$V = V_0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{35.17}$$

где V_0 — собственный объем тела, V — объем тела в системе, относительно которой оно движется со скоростью v.

Найдем формулы преобразования компонент скорости частицы. Из формул (35.14) получаем

$$dt' = \frac{dt - (v_0/c^2)\,dx}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dx' = \frac{dx - v_0\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$dy' = dy, \quad dz' = dz.$$

Следовательно,

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v_0\,dt}{dt - (v_0/c^2)\,dx} = \frac{dx/dt - v_0}{1 - (v_0/c^2)(dx/dt)} = \frac{v_x - v_0}{1 - v_0 v_x/c^2}.$$

Таким образом,

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - v_0 v_x/c^2}. \qquad (35.18)$$

Аналогичные выкладки приводят к формулам преобразования для двух других компонент скорости:

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - v_0 v_x/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - v_0 v_x/c^2}. \qquad (35.19)$$

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + v_0 v'_x/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + v_0 v'_x/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + v_0 v'_x/c^2}. \qquad (35.20)$$

Пусть скорость частицы **v** образует с осью x угол θ, а с осью x' — угол θ' (оси x и x' всегда можно путем параллельного переноса привести в такое положение, чтобы они оказались лежащими в одной плоскости с **v**). Найдем связь между углами θ и θ'. Расположим оси y и y' в плоскости, определяемой осью x и направлением вектора **v**. Тогда вектор **v** будет лежать в плоскости xy и можно написать

$$v_x = v\cos\theta, \qquad v_y = v\sin\theta,$$
$$v'_x = v'\cos\theta', \qquad v'_y = v'\sin\theta',$$

где v — модуль скорости в системе K, v' — модуль скорости в системе K'.

С помощью формул (35.18), (35.19) получаем, что

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{v_x - v_0} = \frac{v\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}}{v\cos\theta - v_0}. \qquad (35.21)$$

Эта формула позволяет по известным v и θ найти угол θ', который образует вектор **v**$'$ с осью x'. Аналогично можно найти формулу, позволяющую по известным v' и θ' найти угол θ между вектором **v** и

осью x. Воспользовавшись формулами (35.20), получим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{v'_x + v_0} = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{v'\cos\theta' + v_0}. \quad (35.22)$$

§ 36. Четырехмерные скорость и ускорение

В Приложении XII мы определили 4-вектор как совокупность величин a^0, a^1, a^2, a^3, которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по тем же правилам, что и компоненты 4-радиуса-вектора. Следовательно, формулы преобразования величин a^μ аналогичны формулам (35.12):

$$a'^0 = \frac{a^0 - \beta a^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a'^1 = \frac{-\beta a^0 + a^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a'^2 = a^2, \quad a'^3 = a^3. \quad (36.1)$$

Формулы обратного преобразования отличаются от (36.1) знаком при β:

$$a^0 = \frac{a'^0 + \beta a'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a^1 = \frac{\beta a'^0 + a'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a^2 = a'^2, \quad a^3 = a'^3. \quad (36.2)$$

Рассмотрим четырехмерные векторы скорости и ускорения. В нерелятивистской механике предполагаются инвариантными как пространственные интервалы dl, так и промежутки времени dt. Поэтому совокупность величин, получающихся после деления компонент трехмерного вектора $d\mathbf{r}$ на инвариант dt, образует трехмерный вектор $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы. Аналогично совокупность величин, получающихся после деления компонент вектора $d\mathbf{v}$ на инвариант dt, представляет собой вектор ускорения $\mathbf{w}$.

В действительности как мы видели, ни dl, ни dt не являются инвариантными. Инвариантом оказывается интервал ds, связанный с dl и dt соотношением $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$. Инвариантность интервала дала возможность ввести в рассмотрение 4-радиус-вектор с компонентами x^0, x^1, x^2, x^3, который является аналогом трехмерного радиуса-вектора с компонентами x_1, x_2, x_3. Попытаемся найти четырехмерные аналоги 3-векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

Очевидно, что совокупность четырех величин dx^μ/dt не будет обладать свойствами 4-вектора, так как dt не является инвариантом и $\sum (dx^\mu/dt)(dx_\mu/dt)$ не будет сохранять свое значение при преобразованиях Лоренца. Однако нам известен «родственный» dt инвариант. Им является собственное время $d\tau = ds/c$ (см. (34.12)). Поскольку $d\tau$ — инвариант (т. е. скаляр), величины

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = c\frac{dx^\mu}{ds} \tag{36.3}$$

обладают свойствами компонент 4-вектора. Его называют *четырехмерной скоростью* частицы [1]).

Аналогично 4-вектор с компонентами

$$w^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau} = c^2\frac{du^\mu}{ds} \tag{36.4}$$

называют *четырехмерным ускорением* частицы.

Приняв во внимание значения dx^μ, а также то обстоятельство, что

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{36.5}$$

(см. (34.13)), легко получить для компонент 4-скорости следующие значения:

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad u^k = \frac{v_k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{36.6}$$

что можно записать в виде

$$u^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \tag{36.7}$$

(см. формулы (XII.34) и (XII.35)). Здесь $\mathbf{v}$ — обычная трехмерная скорость частицы, v_k — ее проекции на оси x, y, z. Существенным для дальнейшего изложения является тот факт, что при $v \ll c$ пространственная часть 4-скорости переходит в обычную скорость $\mathbf{v}$.

Из формул (36.6) легко получить, что

$$\sum_{\mu=0}^{3} u^\mu u_\mu = c^2 \tag{36.8}$$

---

[1]) Эйнштейн определил 4-скорость как вектор с компонентами $u^\mu = dx^\mu/ds$. Очевидно, что определенная так скорость есть безразмерная величина, аналогичная v/c.

(если определить u^μ так, как это сделал Эйнштейн, $\sum u^\mu u_\mu = 1$).

Продифференцировав формулу (36.8) по τ, придем к выражению

$$\sum_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu + \sum_\mu u^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = \sum_\mu w^\mu u_\mu + \sum_\mu u^\mu w_\mu = 0.$$

Согласно (XII. 33) обе суммы эквивалентны, так что

$$\sum_\mu w^\mu u_\mu = 0. \qquad (36.9)$$

Из последнего соотношения следует, что векторы 4-скорости и 4-ускорения взаимно перпендикулярны.

§ 37. Релятивистская динамика

Уравнения Ньютона инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея, но не инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца. Поэтому для того чтобы удовлетворить принципу относительности Эйнштейна, второй закон Ньютона нужно заменить более общим законом. Приняв во внимание, что при $\beta \to 0$ (т. е. при $v_0/c \to 0$) преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея, нужно потребовать, чтобы релятивистски-инвариантные уравнения движения при $v \ll c$ переходили в ньютоновские уравнения:

$$\frac{d}{dt}(mv_i) = F_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (37.1)$$

Естественным четырехмерным обобщением этих уравнений являются соотношения

$$\frac{d}{d\tau}(mu^\mu) = K^\mu \qquad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \qquad (37.2)$$

где τ — собственное время, m — инвариантная величина, характеризующая инертные свойства частицы (масса частицы), u^μ — компонента 4-скорости частицы и, наконец, K^μ — некоторый 4-вектор, называемый *силой Минковского*. Величины K^μ должны быть определены таким образом, чтобы при $v \ll c$ пространственные компоненты уравнений (37.2) переходили в уравнения (37.1), подобно тому как в этом случае

пространственные компоненты 4-скорости переходят в обычную скорость $\mathbf{v}$.

Приняв во внимание выражения (36.5) и (36.6) для τ и u^μ, представим уравнения (37.2) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=K^0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=K_i \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Умножив эти уравнения на $\sqrt{1-v^2/c^2}$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=K^0\sqrt{1-v^2/c^2}, \tag{37.3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=K_i\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{37.4}$$

Если определить пространственные компоненты силы Минковского K_i так, чтобы они были связаны с компонентами обычной трехмерной силы F_i соотношениями

$$F_i=K_i\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{37.5}$$

то уравнения (37.4) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=F_i \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{37.6}$$

Видно, что при $v \ll c$ уравнения (37.6), как и требуется, переходят в уравнения Ньютона (37.1).

Чтобы определить временную компоненту силы Минковского K^0, умножим уравнение (37.2) на 4-скорость u^μ. В результате получим, что

$$K^\mu u_\mu = m\frac{du^\mu}{d\tau}u_\mu = mw^\mu u_\mu$$

(мы учли, что m — инвариант и, следовательно, ее можно вынести за знак производной). Просуммировав полученные уравнения по μ, придем к формуле

$$\sum_{\mu=0}^{3} K^\mu u_\mu = m\sum_{\mu=0}^{3} w^\mu u_\mu = 0$$

(см. (36.9)). Подстановка значений (36.6) для u^μ и получающихся из (37.5) значений для K_i приводит

к соотношению

$$K^0 \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \sum_{i=1}^{3} \frac{F_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{v_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0,$$

откуда

$$K^0 = \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \sum_{i=1}^{3} F_i v_i = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (37.7)$$

Теперь мы можем написать все компоненты силы Минковского. Приняв во внимание формулы (37.5) и (37.7), получим

$$K^0 = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad K^i = \frac{F_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (37.8)$$

Таким образом,

$$K^\mu = \left(\frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \qquad (37.9)$$

Скалярное произведение трехмерных векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$ дает работу силы $\mathbf{F}$, совершаемую над частицей в единицу времени. Эта работа равна скорости изменения энергии частицы, т. е. dE/dt. Следовательно, выражению (37.7) для K^0 можно придать вид

$$K^0 = \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dE}{dt}, \qquad (37.10)$$

где E — энергия частицы.

Итак, мы установили, что релятивистски-инвариантное[1]) уравнение динамики частицы имеет вид (37.2), где u^μ — 4-скорость с компонентами (36.6), K^μ — 4-сила (сила Минковского) с компонентами (37.8). Пространственные компоненты уравнения (37.2) можно представить в виде (37.4) либо (37.6). В пределе при $v \ll c$ эти уравнения переходят в уравнения Ньютона (см. (37.1)).

Временна́я компонента уравнения (37.2) (см. (37.3)) после подстановки значения (37.10) для K^0

---

[1]) Поскольку u^μ и K^μ — 4-векторы, вид уравнения (37.2) при преобразованиях Лоренца остается неизменным (m — инвариант по определению).

приобретает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}. \qquad (37.11)$$

Отсюда заключаем, что релятивистское выражение для энергии частицы выглядит следующим образом:

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\text{const}. \qquad (37.12)$$

§ 38. Импульс и энергия частицы

В ньютоновской механике импульсом частицы называется трехмерный вектор с компонентами

$$p_i=mv_i \quad (i=1,\ 2,\ 3). \qquad (38.1)$$

Четырехмерным аналогом этого импульса является 4-вектор с компонентами

$$p^\mu=mu^\mu \quad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (38.2)$$

где u^μ — компоненты 4-скорости[1]). Подставив значения (36.6) для u^μ, получим

$$p^0=\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad p^i=\frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (38.3)$$

что можно представить в виде

$$p^\mu=\left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \qquad (38.4)$$

При $v \ll c$ формула для пространственных компонент релятивистского импульса переходит в ньютоновскую формулу (38.1). Это дает основание принять в качестве релятивистского выражения для обычного трехмерного импульса формулу

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (38.5)$$

Теперь обратимся к временной компоненте 4-импульса. В конце предыдущего параграфа мы получили формулу (37.12) для энергии частицы E, причем оста-

---

[1]) Если 4-скорость была определена как $u^\mu=dx^\mu/ds$ (см. сноску на стр. 154) 4-импульс определяют как $p^\mu=mcu^\mu$.

вили открытым вопрос о значении постоянной интегрирования. Сравнив выражение (38.3) для p^0 с формулой (37.12), легко обнаружить, что, положив const равной нулю, можно получить соотношение

$$p^0 = \frac{E}{c}. \tag{38.6}$$

В этом случае выражение 4-импульса приобретает вид

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c},\ \mathbf{p}\right), \tag{38.7}$$

где $\mathbf{p}$ — величина, определяемая формулой (38.5).

Таким образом, энергия и импульс (обычный) оказываются компонентами одного 4-вектора[1]) — 4-импульса частицы. Это обстоятельство дает возможность применить формулы (36.1) для нахождения правил преобразования E и $\mathbf{p}$ при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Подставив соответствующие значения p^μ в (36.1), легко получить

$$E = \frac{E' + v_0 p'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_x = \frac{p'_x + v_0 (E'/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z. \tag{38.8}$$

Обратные преобразования отличаются знаком при v_0.

Найдем квадрат 4-импульса. Из (38.7) получим

$$\sum_{\mu=0}^{3} p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2$$

(см. формулу (XII.38)). Вместе с тем

$$\sum_{\mu=0}^{3} p^\mu p_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} (mu^\mu)(mu_\mu) = m^2 \sum_{\mu=0}^{3} u^\mu u_\mu = m^2 c^2 \tag{38.9}$$

(см. (36.8)). Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2. \tag{38.10}$$

Отметим, что квадрат 4-импульса, как и квадрат любого 4-вектора, представляет собой инвариант.

---

[1]) Этот 4-вектор называют иногда вектором энергии-импульса.

Положив в формуле (37.12) const = 0, получим для энергии частицы выражение

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (38.11)$$

Величину E, определяемую выражением (38.11), называют *полной энергией частицы*. Следует иметь в виду, что E не включает в себя потенциальную энергию частицы во внешнем поле сил [1]).

Для покоящейся частицы (т. е. при $v = 0$) выражение (38.11) переходит в

$$E_0 = mc^2, \qquad (38.12)$$

где через E_0 мы обозначили значение E при $v = 0$. Это значение называют *энергией покоя* частицы. Напомним, что частицей для краткости мы назвали материальную точку, т. е. тело, размерами которого можно пренебречь. Энергия покоя такого тела слагается из энергий покоя входящих в состав тела частиц [2]), из кинетических энергий этих частиц и энергии их взаимодействия друг с другом. Отсюда следует, что

$$mc^2 > \sum_a m_a c^2,$$

где m — масса тела, m_a — массы покоя образующих тело частиц. Таким образом, масса тела не равна сумме масс его частей.

В свое время Эйнштейн затратил много усилий для того, чтобы обосновать правомерность предположения о равенстве нулю const в (37.12) или, другими словами, чтобы обосновать утверждение, что в массе m запасена энергия mc^2 (см. (38.12)). С этой целью он рассмотрел несколько конкретных явлений и показал, что в каждом из них изменение энергии тела на ΔE приводит к изменению его массы на $\Delta m = \Delta E/c^2$. В наше время дело обстоит гораздо проще. Чтобы обосновать соотношение $\Delta E = c^2 \Delta m$, достаточно, например, рассмотреть процесс превращения покоя-

---

[1]) Напомним, что согласно (37.7) и (37.10) $dE/dt = \mathbf{Fv}$. В ньютоновской же механике работа результирующей всех сил, действующих на частицу, равна приращению ее кинетической энергии T, а не суммарной энергии $T + U$.

[2]) В термин «частица» мы вкладываем теперь иной смысл, чем вкладывали до сих пор.

щихся электрона и позитрона в два γ-кванта. Соответствующие измерения показывают, что суммарная энергия этих γ-квантов в точности равна сумме энергий покоя электрона и позитрона.

Разность между полной энергией (38.11) и энергией покоя (38.12) дает кинетическую энергию частицы

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2. \tag{38.13}$$

При малых v эта формула переходит в ньютоновское выражение для кинетической энергии

$$T \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2} v^2/c^2\right) - mc^2 = \frac{1}{2} mv^2. \tag{38.14}$$

В заключение отметим, что из формулы (38.10) вытекает соотношение

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{38.15}$$

Энергия, выраженная через импульс, называется функцией Гамильтона (см. § 30). Следовательно, релятивистское выражение функции Гамильтона частицы имеет вид

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}, \tag{38.16}$$

если частица свободна, и

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} + U, \tag{38.17}$$

если частица находится во внешнем силовом поле (U — потенциальная энергия частицы в этом поле; см. абзац, следующий за формулой (38.11)).

§ 39. Действие для релятивистской частицы

Найдем выражение действия для свободной (т. е. не подверженной воздействию каких-либо сил) частицы. Интеграл, выражающий действие, должен быть инвариантным относительно преобразований Лоренца. Следовательно, его нужно брать от скаляра, причем скаляр должен иметь вид дифференциала в первой степени. Единственный скаляр такого вида, который можно сопоставить свободной частице, есть величина, пропорциональная интервалу ds. Обозначив коэффи-

циент пропорциональности через α, получим для действия следующее выражение:

$$S = \int_1^2 \alpha\, ds = \int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt \qquad (39.1)$$

(мы воспользовались формулой (34.4) для ds^2 и учли, что dl/dt равно скорости частицы v).

Сопоставив (39.1) с выражением (7.1), приходим к выводу, что функция Лагранжа для свободной релятивистской частицы должна иметь вид

$$L = \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (39.2)$$

В пределе при $v \ll c$ эта функция должна переходить в ньютоновское выражение

$$L = {}^1/_2 mv^2. \qquad (39.3)$$

Разложим функцию (39.2) в ряд по степеням v/c. Пренебрегая членами высших порядков, получим

$$L = \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \alpha c - \alpha v^2/2c.$$

Постоянное слагаемое αc можно отбросить (см. § 7). Следовательно, в ньютоновском приближении $L = -\alpha v^2/2c$. Сравнение с (39.3) показывает, что α нужно положить равной $-mc$. Таким образом, мы установили вид функции Лагранжа для свободной частицы[1]:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (39.4)$$

Зная вид функции Лагранжа, легко найти импульс и энергию частицы. Воспользовавшись формулами (9.5) и (5.1), получим

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (39.5)$$

$$E = \mathbf{pv} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (39.6)$$

---

[1]) Для частицы, находящейся во внешнем потенциальном поле сил,

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - U,$$

где U — потенциальная энергия частицы. Отметим, что в релятивистской механике L не равна $T - U$.

Итак, мы пришли к тем же формулам для импульса и энергии частицы, которые были получены в предыдущем параграфе. Однако следует иметь в виду, что формулы (39.5) и (39.6) мы получили для свободной частицы, в то время как в § 38 аналогичные формулы были получены в предположении, что на частицу действуют силы.

Обратимся снова к выражению (39.1). Учтя найденное нами значение α, напишем действие в виде

$$S = -mc\int\limits_1^2 ds. \tag{39.7}$$

Истинная траектория частицы определяется условием

$$\delta S = 0. \tag{39.8}$$

Для вариации действия имеем выражение

$$\delta S = -mc\delta\int\limits_1^2 ds = -mc\int\limits_1^2 \delta(ds).$$

Интервал равен

$$ds = \sqrt{\sum_\mu dx^\mu dx_\mu}.$$

Согласно (XII. 40) вариация подкоренного выражения может быть представлена в виде

$$\delta\sum_\mu dx^\mu dx_\mu = 2\sum_\mu dx_\mu \delta(dx^\mu)$$

Следовательно,

$$\delta S = -mc\int\limits_1^2 \delta\sqrt{\sum_\mu dx^\mu dx_\mu} =$$

$$= -mc\int\limits_1^2 \frac{\sum\limits_\mu dx_\mu \delta(dx^\mu)}{\sqrt{\sum\limits_\mu dx^\mu dx_\mu}} = -mc\int\limits_1^2 \frac{\sum\limits_\mu dx_\mu \delta(dx^\mu)}{ds}. \tag{39.9}$$

Производная dx_μ/ds есть u_μ/c (см. (36.3)). Кроме того, $\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$ (см. (III. 4)). Поэтому мы приходим к выражению

$$\delta S = -m\int\limits_1^2 \sum_\mu u_\mu d(\delta x^\mu).$$

Проинтегрируем это выражение по частям:

$$\delta S = -m \sum_{\mu} u_\mu \delta x^\mu |_1^2 + m \int_1^2 \sum_{\mu} \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau \qquad (39.10)$$

(мы представили du_μ в виде $(du_\mu/d\tau)d\tau$, где τ — собственное время частицы). На концах траектории $\delta x^\mu = 0$. Поэтому условие (39.8) принимает вид

$$\delta S = m \int_1^2 \sum_{\mu} \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau = 0. \qquad (39.11)$$

Для того чтобы это условие выполнялось при произвольных δx^μ, необходимо равенство нулю величин $du_\mu/d\tau$, т. е. постоянство 4-скорости частицы, что, очевидно, справедливо для свободной частицы.

Найдем действие как функцию координат частицы (т. е. как функцию верхнего предела интегрирования; см. § 32). Для реального движения $du_\mu/d\tau = 0$, следовательно, второй член в (39.10) обращается в нуль. Нижний предел интегрирования мы считаем фиксированным, поэтому $(\delta x^\mu)_1 = 0$. Таким образом, действие как функция координат частицы удовлетворяет соотношению

$$\delta S = -m \sum_{\mu=0}^{3} u_\mu \delta x^\mu$$

(мы опустили индекс «2» при δx^μ). Величины mu_μ дают ковариантные компоненты 4-импульса частицы (см. (38.2)), так что приращение действия можно представить в виде

$$\delta S = -\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu \delta x^\mu. \qquad (39.12)$$

В § 32 мы получили для приращения действия, обусловленного изменением конечного положения частицы в обычном (трехмерном) пространстве, выражение

$$\delta S = \sum_{i=1}^{3} p_i \delta x_i \qquad (39.13)$$

(см. формулу (32.5)). Легко заметить, что слагаемые формулы (39.12), соответствующие пространственным

координатам, после опускания индекса у δx^μ дают сумму (39.13).

Из (39.12) вытекает, что ковариантные компоненты 4-импульса можно определить следующим образом:

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \tag{39.14}$$

(ср. с (32.6)).

В предыдущем параграфе было установлено, что $\sum p^\mu p_\mu = m^2c^2$. Опустив индекс у первого сомножителя, т. е. заменив контравариантные сомножители соответствующими ковариантными, найдем, что

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m^2c^2.$$

Подставив сюда вместо p_μ их значения (39.14), придем к релятивистскому уравнению Гамильтона — Якоби:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2 \tag{39.15}$$

(мы заменили x^0 через ct, x^1 через x и т. д.).

Фигурирующее в (39.15) действие S отличается от нерелятивистского действия S'. Это легко понять, если учесть, что действие связано с энергией выражением $E = -(\partial S/\partial t)$ (см. формулу (32.10)). Нерелятивистская же энергия E' отличается от релятивистской энергии E членом mc^2 ($E = E' + mc^2$). Отсюда

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial S'}{\partial t} + mc^2,$$

или

$$S = S' - mc^2 t.$$

Подставив это соотношение в (39.15), получим уравнение для S':

$$\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] = 0,$$

которое в пределе при $c \to \infty$ переходит в нерелятивистское уравнение Гамильтона — Якоби для свободной частицы (см. формулу (32.15), в которой нужно положить $U = 0$).

§ 40. Тензор энергии-импульса

В этом параграфе мы осуществим очень важное обобщение выражения для действия. В таком обобщенном виде выражение для действия оказывается применимым не только к чисто механическим системам, но также к электромагнитному полю и другим физическим системам.

До сих пор мы писали выражение для действия в виде

$$S=\int_1^2 L(q_k,\ \dot{q}_k,\ t)\,dt, \qquad (40.1)$$

где L — функция Лагранжа, $q_k=q_k(t)$ — обобщенные координаты, определяющие положение частиц, входящих в систему, $\dot{q}_k$ — обобщенные скорости, равные dq_k/dt. Величины q_k и $\dot{q}_k$ предполагались зависящими только от времени.

Когда мы записываем уравнения в четырехмерной форме, мы имеем дело с четырьмя формально равноправными переменными x^0, x^1, x^2, x^3, которые должны входить в уравнения сходным образом. Чтобы отразить это обстоятельство, представим выражение для действия в виде

$$S=\frac{1}{c}\int L^*(q_a,\ \dot{q}_{a\nu},\ x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)\,dx^0dx^1dx^2dx^3, \qquad (40.2)$$

где под q_a подразумевается совокупность величин $q_1, q_2, \ldots$, определяющих состояние системы (параметров системы). Число этих параметров может быть любым, в частности бесконечно большим. Под $\dot{q}_{a\nu}$ подразумевается совокупность частных производных параметров q_a по координатам x^ν:

$$\dot{q}_{a\nu}=\frac{\partial q_a}{\partial x^\nu} \qquad \begin{pmatrix} a=1,\ 2,\ \ldots, \\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3 \end{pmatrix}. \qquad (40.3)$$

Множитель $1/c$ введен для удобства.

Величины q_a и $\dot{q}_{a\nu}$ рассматриваются как функции координат x^0, x^1, x^2, x^3. В частности, может оказаться, что параметры q_a зависят только от x^0. Тогда мы придем к уже известному нам случаю, когда $q_a=q_a(t)$.

Отметим, что поскольку $\partial^2 q_a/\partial x^\nu \partial x^\mu = \partial^2 q_a/\partial x^\mu \partial x^\nu$, имеет место соотношение

$$\frac{\partial \dot{q}_{a\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \dot{q}_{a\mu}}{\partial x^\nu}. \tag{40.4}$$

Чтобы установить соответствие между выражениями (40.2) и (40.1), примем во внимание, что элемент 4-объема dV^* связан с элементом объема в обычном пространстве dV и интервалом времени dt следующим соотношением:

$$dV^* = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c\, dt\, dV. \tag{40.5}$$

Подставив это значение dV^* в (40.2), получим выражение

$$S = \int L^* dt\, dV = \int_1^2 dt \int L^* dV. \tag{40.6}$$

Интегрирование по dt ведется в заданном промежутке времени, по dV — по всему трехмерному объему.

Сопоставление выражений (40.1) и (40.6) дает, что

$$L = \int L^* dV. \tag{40.7}$$

Таким образом, функция L^* есть «плотность» функции Лагранжа рассматриваемой системы.

Для замкнутой механической системы функция Лагранжа не зависит явно от t (см. § 8). Аналогично математическим выражением замкнутости системы должно быть отсутствие явной зависимости L^* от координат x^0, x^1, x^2, x^3. Таким образом, для замкнутой системы действие имеет вид

$$S = \frac{1}{c} \int L^* (q_a, \dot{q}_{a\nu})\, dV^*. \tag{40.8}$$

Найдем уравнения движения замкнутой системы. Для этого вычислим вариацию действия (40.8) и приравняем ее нулю.

Вариация выражения (40.8) равна

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a} \delta q_a + \sum_{a,\,\nu} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \delta \dot{q}_{a\nu} \right) dV^*.$$

По аналогии с соотношением $\delta y' = (\delta y)'$

$$\delta \dot{q}_{a\nu} = \delta \frac{\partial q_a}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta q_a.$$

Осуществив такую замену, получим

$$\delta S = \frac{1}{c} \left(\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a} \delta q_a + \sum_{a,\nu} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta q_a \right) dV^*. \tag{40.9}$$

По правилам дифференцирования произведения

$$\sum_{a,\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \delta q_a \right) = \sum_{a,\nu} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta q_a + \sum_{a,\nu} \delta q_a \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}$$

Первая сумма в правой части тождественна со вторым членом подынтегрального выражения в формуле (40.9). Поэтому можно написать

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left[\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a} \delta q_a + \sum_{a,\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \delta q_a \right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{a,\nu} \delta q_a \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \right] dV^*. \tag{40.10}$$

Вторая из сумм:

$$\sum_{a,\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \delta q_a \right) = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \delta q_a \right)$$

есть 4-дивергенция вектора, ν-я компонента которого равна

$$\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \delta q_a.$$

Поэтому, воспользовавшись четырехмерным аналогом теоремы Остроградского — Гаусса (см. (XII. 72)), второй из трех интегралов в формуле (40.10) можно заменить интегралом по замкнутой гиперповерхности, ограничивающей 4-объем, по которому осуществляется интегрирование в (40.10):

$$\int \sum_{a,\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \delta q_a \right) dV^* = \oint \sum_\nu \left(\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \delta q_a \right) df_\nu. \tag{40.11}$$

Однако на границе рассматриваемого 4-объема вариации $\delta q_a = 0$. (Подобно этому в механике вариа-

ции δq_i в граничных точках равны нулю). Поэтому интеграл (40.11) равен нулю, так что в формуле (40.10) остаются только первая и третья суммы. Мы объединим их, вынеся за скобки общий множитель δq_a:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \sum_a \left[\frac{\partial L^*}{\partial q_a} - \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\right]\delta q_a dV^*.$$

В силу произвольности вариаций δq_a полученное нами выражение может равняться нулю только в том случае, если равны нулю все выражения в квадратных скобках. Таким образом, мы приходим к следующим уравнениям движения:

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_a} = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} \quad (a = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (40.12)$$

Эти уравнения являются обобщением уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (40.13)$$

(см. формулу (7.3)). В правой части (40.12) стоит сумма четырех производных в соответствии с тем, что роль, которую исполняла одна переменная t, теперь играют четыре переменные x^ν. Легко убедиться в том, что при условии, что q_a зависят только от x^0, т. е. от t, уравнение (40.12) переходит в уравнение (40.13).

Умножим уравнение (40.12) на $\dot{q}_{a\mu}$ и произведем суммирование по a:

$$\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a}\dot{q}_{a\mu} = \sum_{a,\nu} \dot{q}_{a\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}.$$

Правую часть можно преобразовать по формуле

$$u\frac{\partial v}{\partial x^\nu} = \frac{\partial (uv)}{\partial x^\nu} - v\frac{\partial u}{\partial x^\nu}.$$

В результате получим

$$\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a}\dot{q}_{a\mu} = \sum_{a,\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\right) - \sum_{a,\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\frac{\partial \dot{q}_{a\mu}}{\partial x^\nu}. \qquad (40.14)$$

Осуществим замену $\dot{q}_{a\mu} = \partial q_a/\partial x^\mu$ в сумме слева и $\partial\dot{q}_{a\mu}/\partial x^\nu = \partial\dot{q}_{a\nu}/\partial x^\mu$ (см. (40.4)) во второй сумме справа, а также сгруппируем иначе члены выражения (40.14). В итоге придем к соотношению

$$\sum_a \frac{\partial L^*}{\partial q_a}\frac{\partial q_a}{\partial x^\mu} + \sum_{a,\nu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\frac{\partial \dot{q}_{a\nu}}{\partial x^\mu} = \sum_{a,\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\right).$$

Левая часть полученного выражения есть $\partial L^*/\partial x^\mu$. Следовательно, мы пришли к формуле

$$\frac{\partial L^*}{\partial x^\mu} = \sum_{a,\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\right).$$

Левую часть этой формулы можно записать в виде[1])

$$\frac{\partial L^*}{\partial x^\mu} = \sum_\nu \delta_\mu^\nu \frac{\partial L^*}{\partial x^\nu} = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\delta_\mu^\nu L^*),$$

в результате чего получим соотношение

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\delta_\mu^\nu L^*) = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sum_a \dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}}\right).$$

Это соотношение можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\sum_a \dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} - \delta_\mu^\nu L^*\right] = 0. \qquad (40.15)$$

Уравнение (40.15) представляет собой совокупность четырех уравнений, отвечающих разным значениям индекса μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$. Выражения в квадратных скобках обладают свойствами смешанных компонент 4-тензора второго ранга. Обозначив этот тензор символом $\tilde{T}_\mu{}^\nu$, получим

$$\tilde{T}_\mu{}^\nu = \sum_a \dot{q}_{a\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a\nu}} - \delta_\mu^\nu L^*. \qquad (40.16)$$

Использовав это обозначение, можно записать уравнение (40.15) в виде

$$\sum_\nu \frac{\partial \tilde{T}_\mu{}^\nu}{\partial x^\nu} = 0 \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (40.17)$$

---

[1]) Напомним, что $\partial\varphi/\partial x^\nu$ есть ковариантная компонента 4-вектора.

Напомним, что уравнение (40.15) мы получили, приравняв нулю вариацию действия (40.8).

Тензор $\tilde{T}_\mu{}^\nu$, удовлетворяющий уравнению (40.17), определяется не однозначно. Всякий тензор вида

$$T_\mu{}^\nu = \tilde{T}_\mu{}^\nu + \sum_\rho \frac{\partial Q_\mu^{\nu\rho}}{\partial x^\rho}, \tag{40.18}$$

где $Q_\mu^{\nu\rho}$ — тензор, антисимметричный по индексам ν и ρ $(Q_\mu^{\nu\rho} = -Q_\mu^{\rho\nu})$, также удовлетворяет уравнению (40.17). Действительно, в силу антисимметрии тензора $Q_\mu^{\nu\rho}$

$$\frac{\partial^2 Q_\mu^{\nu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} = -\frac{\partial^2 Q_\mu^{\rho\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\nu}$$

и, следовательно,

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sum_\rho \frac{\partial Q_\mu^{\nu\rho}}{\partial x^\rho} = \sum_{\nu,\rho} \frac{\partial^2 Q_\mu^{\nu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} = 0.$$

Поэтому из (40.17) будет вытекать условие

$$\sum_\nu \frac{\partial T_\mu{}^\nu}{\partial x^\nu} = 0. \tag{40.19}$$

Надлежащим выбором тензора $Q_\mu^{\nu\rho}$ всегда можно добиться того, чтобы тензор (40.18) оказался симметричным. В дальнейшем мы будем предполагать, что это условие выполнено и

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \tag{40.20}$$

Отметим, что поскольку $Q_\mu^{\nu\nu} = 0$,

$$T_\mu{}^\mu = \tilde{T}_\mu{}^\mu, \tag{40.21}$$

т. е. $T_\mu{}^\mu$ определяется по формуле (40.16).

Перемещение в (40.19) индекса μ вверх либо оставит все $T_\mu{}^\nu$ без изменений (если $\mu = 0$), либо изменит у всех $T_\mu{}^\nu$ знак на обратный (если $\mu = 1, 2, 3$). Следовательно, из (40.19) вытекает, что

$$\sum_\nu \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{40.22}$$

Тензор $T^{\mu\nu}$ называется тензором энергии-импульса системы. Основания для этого выяснятся ниже.

В Приложении XII показано, что в случае, когда тензор $T^{\mu\nu}$ удовлетворяет условию (40.22) и все $T^{\mu\nu}$ обращаются на бесконечности в нуль, остается постоянным во времени (сохраняется) вектор с компонентами:

$$p^{\mu} = \alpha \int \sum_{\nu} T^{\mu\nu} df_{\nu} \tag{40.23}$$

(см. формулу (XII.86)), где α — произвольная константа, df_{ν} — компонента 4-вектора элемента гиперповерхности. Интеграл (40.23) берется по произвольной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство. Если в качестве гиперповерхности, по которой осуществляется интегрирование, взять гиперплоскость $x^0 = \mathrm{const}$, то все df_{ν}, кроме $df_0 = dV$, будут равны нулю и выражение (40.23) упростится следующим образом:

$$p^{\mu} = \alpha \int T^{\mu 0} df_0 = \alpha \int T^{\mu 0} dV. \tag{40.24}$$

Мы знаем, что для замкнутой системы сохраняется полная (т. е. взятая по всему объему) энергия и полный (т. е. взятый по всему объему) импульс. Энергия и импульс представляют собой компоненты 4-импульса. Следовательно, 4-импульс замкнутой системы также должен сохраняться. Это обстоятельство дает нам основание отождествить вектор, определяемый формулами (40.23) и (40.24), с 4-импульсом системы. Константу α нужно выбрать так, чтобы формулы (40.23) и (40.24) согласовывались с прежним определением 4-импульса (см. (38.7)), в соответствии с которым, например, $p^0 = E/c$. Положив в формуле (40.24) $\mu = 0$, получим

$$p^0 = \alpha \int T^{00} dV = E/c. \tag{40.25}$$

Воспользовавшись формулами (40.21) и (40.16), можно написать

$$T^{00} = T_0{}^0 = \tilde{T}_0{}^0 = \sum_a \dot{q}_{a0} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_{a0}} - \delta_0^0 L^* = \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_a} - L^*,$$

где $\dot{q}_a = \partial q_a/\partial t$ (мы учли, что $\dot{q}_{a0} = \partial q_a/\partial x^0 = \partial q_a/\partial(ct) = (1/c)(\partial q_a/\partial t) = (1/c)\dot{q}_a$).

Интеграл $\int L^* dV$ дает функцию Лагранжа L. Поэтому мы приходим к соотношению

$$\int T^{00} dV = \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L.$$

Согласно формуле (5.1) выражение, стоящее в правой части, определяет энергию системы E. Следовательно,

$$\int T^{00} dV = E, \tag{40.26}$$

а T^{00} есть плотность энергии w:

$$T^{00} = w. \tag{40.27}$$

Подстановка значения (40.26) в формулу (40.25) приводит к заключению, что $\alpha = 1/c$. Итак,

$$p^\mu = \frac{1}{c} \int \sum_\nu T^{\mu\nu} df_\nu, \tag{40.28}$$

если интегрирование производить по произвольной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство, и

$$p^\mu = \frac{1}{c} \int T^{\mu 0} df_0 = \frac{1}{c} \int T^{\mu 0} dV, \tag{40.29}$$

если интегрирование производить по гиперплоскости $x^0 = \text{const}$.

Чтобы выяснить смысл компонент $T^{0\nu}$, напишем соотношение (40.22) для $\mu = 0$:

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{0k}}{\partial x^k} = 0$$

или

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{0k}}{\partial x^k}.$$

Умножение полученного соотношения на c и интегрирование по некоторому объему V дает

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{00} dV = \int_V \sum_{k=1}^{3} c \frac{\partial T^{0k}}{\partial x^k} dV. \tag{40.30}$$

Интеграл в левой части равен энергии, заключенной в объеме V. Справа под знаком интеграла стоит обычная (трехмерная) дивергенция некоторого вектора $\mathbf{S}$ с компонентами

$$S_x = cT^{01}, \quad S_y = cT^{02}, \quad S_z = cT^{03}. \qquad (40.31)$$

Таким образом, формулу (40.30) можно представить в виде

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = \int_V \nabla \mathbf{S} dV.$$

Применив к правой части теорему Остроградского — Гаусса, получим

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = \oint_f \mathbf{S} d\mathbf{f},$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности, ограничивающей объем V.

Убыль энергии в объеме V за единицу времени должна быть равна потоку энергии через поверхность. Следовательно, $\mathbf{S}$ есть вектор плотности потока энергии. Согласно (40.31)

$$T^{01} = \frac{1}{c} S_x, \quad T^{02} = \frac{1}{c} S_y, \quad T^{03} = \frac{1}{c} S_z. \qquad (40.32)$$

В силу симметрии тензора $T^{\mu\nu}$ выполняется соотношение $T^{k0} = T^{0k}$, так что

$$T^{10} = \frac{1}{c} S_x, \quad T^{20} = \frac{1}{c} S_y, \quad T^{30} = \frac{1}{c} S_z. \qquad (40.33)$$

Таким образом, компоненты T^{0k} и T^{k0} с точностью до множителя $1/c$ равны соответствующим компонентам вектора плотности потока энергии.

Пространственные компоненты вектора (40.28) равны

$$p^k = \frac{1}{c} \int T^{k0} dV.$$

Отсюда заключаем, что вектор $\mathbf{g}$ с компонентами T^{k0}/c определяет плотность импульса системы:

$$g_x = \frac{1}{c} T^{10}, \quad g_y = \frac{1}{c} T^{20}, \quad g_z = \frac{1}{c} T^{30}. \qquad (40.34)$$

Сопоставление (40.34) с (40.33) дает, что

$$g_k = \frac{1}{c^2} S_k \qquad (40.35)$$

или, в векторном виде,

$$\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}. \qquad (40.36)$$

Итак, мы пришли к выводу, что между потоком энергии и импульсом имеется связь — плотность импульса равна плотности потока энергии, деленной на c^2.

Чтобы установить смысл компонент T^{ik}, напишем соотношение (40.22) для $\mu = i$:

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial T^{i\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^0} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

Отсюда, приняв во внимание, что $x^0 = ct$, $T^{i0} = cg_i$, находим, что

$$-\frac{\partial g_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}.$$

Проинтегрируем полученное выражение по некоторому объему V. Приняв во внимание, что $\int \mathbf{g}\, dV = \mathbf{p}$ ($\mathbf{p}$ — импульс части системы, заключенной в объеме V), получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} p_i = \int\limits_V \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}\, dV.$$

Преобразуем правую часть по теореме Остроградского — Гаусса:

$$-\frac{\partial}{\partial t} p_i = \oint\limits_f \sum_{k=1}^{3} T^{ik}\, df_k = -\oint\limits_f \sigma_i\, d\mathbf{f}, \qquad (40.37)$$

где σ_i — вектор с компонентами

$$\sigma_{ik} = T^{ik}. \qquad (40.38)$$

В левой части формулы (40.37) стоит скорость убывания i-й компоненты импульса системы, заклю-

ченного в объеме V. Следовательно, правая часть имеет смысл потока компоненты p_i через ограничивающую V поверхность f, а σ_i — плотности потока p_i. Величина (40.38) есть k-я компонента вектора плотности потока компоненты p_i. Таким образом, трехмерный тензор (40.38) определяет плотность потока импульса. Отметим, что плотность потока скалярной величины (например, энергии) есть вектор; плотность же потока векторной величины (например, импульса) является тензором.

Импульс, переносимый через единичную площадку в единицу времени, равен силе, действующей на эту площадку, т. е. напряжению в том месте, где расположена площадка. По этой причине тензор σ_{ik} называется тензором напряжений.

Итак, мы установили смысл всех компонент тензора $T^{\mu\nu}$. Объединив (40.27), (40.32), (40.33) и (40.38), получим

$$(T^{\mu\nu})=\begin{pmatrix} w & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (40.39)$$

Компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ характеризуют плотность энергии и импульса, а также плотности потоков этих величин, чем и обусловлено название $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса.

Часть вторая

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава VIII

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 41. Электростатическое поле в пустоте

Вообще говоря, электрическое и магнитное поля тесно связаны друг с другом, образуя единое электромагнитное поле. Однако в случае стационарных (т. е. не изменяющихся со временем) полей электрическое поле и магнитное поле можно рассматривать раздельно. Мы начнем с рассмотрения электростатического поля в пустоте.

Основной (силовой) характеристикой электрического поля является напряженность поля $\mathbf{E}$, связанная с силой, действующей на точечный заряд e в данной точке поля, соотношением

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}. \tag{41.1}$$

Это соотношение можно рассматривать как определение величины $\mathbf{E}$.

Из курса общей физики известно, что электростатическое поле потенциально. Это означает, что работа, совершаемая силами этого поля над зарядом на любом замкнутом пути, равна нулю:

$$\oint \mathbf{F}\, d\mathbf{l} = e \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0. \tag{41.2}$$

Из формулы (41.2) следует, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому контуру Г равна нулю. Воспользовавшись теоремой Стокса (см. (XI. 23)), можно написать

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{f} [\nabla\mathbf{E}]\, d\mathbf{f} = 0, \tag{41.3}$$

где f — произвольная поверхность, ограниченная контуром Г, $d\mathbf{f}$ — вектор элементарной площадки, взятый на этой поверхности.

Условие (41.3) должно выполняться для любой произвольно выбранной поверхности f. Это возможно лишь в том случае, если подынтегральная функция в каждой точке равна нулю. Таким образом, мы приходим к выводу, что ротор вектора напряженности электростатического поля равен нулю в каждой точке поля:

$$[\nabla\mathbf{E}]=0. \qquad (41.4)$$

Равенство нулю ротора напряженности является отличительной особенностью электростатического поля, выражающей его потенциальность.

Из векторного анализа известно, что ротор градиента скалярной функции всегда равен нулю (см. (XI.43)). Поэтому напряженность электростатического поля можно представить как градиент некоторой скалярной функции φ:

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi \qquad (41.5)$$

(знак «—» не меняет дела, он взят из физических соображений). Функцию φ называют потенциалом электростатического поля. Очевидно, что φ определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Следовательно, потенциал может отсчитываться от любой точки поля, для которой его значение принимают равным нулю. В электродинамике обычно полагают потенциал равным нулю на бесконечности.

Потенциал поля точечного заряда e равен, как известно,

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{e}{r}, \qquad (41.6)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки, в которой помещается e, в точку, для которой определяется φ.

Взяв градиент от выражения (41.6) и изменив у него знак на обратный, найдем напряженность поля точечного заряда:

$$\mathbf{E}=-\nabla\left(\frac{e}{r}\right)=\frac{e}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{e}{r^2}\mathbf{e}_r, \qquad (41.7)$$

где $\mathbf{e}_r$ — орт радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (см. (XI.51)).

Пусть поле создается системой точечных зарядов e_a, помещающихся в точках, определяемых радиусами-векторами $\mathbf{r}'_a$ (рис. 41.1). Тогда согласно прин-

ципу суперпозиции потенциал поля, создаваемый этой системой, в точке, определяемой радиусом-вектором r, равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_a|}, \tag{41.8}$$

а напряженность поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_a \frac{e_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_a|^3}. \tag{41.9}$$

Если создающий поле заряд распределен в пространстве с плотностью $\rho = \rho(\mathbf{r}')$, вычисление потенциала и напряженности поля можно осуществить по формулам, аналогичным (41.8) и (41.9):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{41.10}$$

$$E(\mathbf{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{41.11}$$

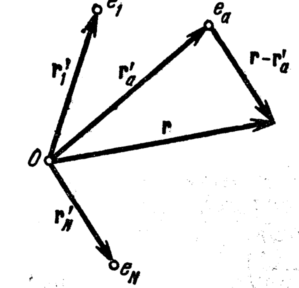


Рис. 41.1

где $dV' = dx'dy'dz'$ есть элемент объема в точке $\mathbf{r}'(x', y', z'$ — компоненты переменного вектора $\mathbf{r}'$).

Переход от системы точечных зарядов e_a к заряду, распределенному в пространстве с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, осуществляется с помощью δ-функции Дирака (см. Приложение XIII). Эта функция позволяет представить систему точечных зарядов e_a, помещающихся в точках с радиусами-векторами $\mathbf{r}'_a$, с помощью плотности заряда:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_a). \tag{41.12}$$

Очевидно, что, подставив функцию (41.12) в выражения (41.10) и (41.11) и произведя интегрирование, мы придем к формулам (41.8) и (41.9).

§ 42. Уравнение Пуассона

Из курса общей физики известна теорема Гаусса, которая в случае поля в пустоте может быть сформулирована следующим образом: поток вектора $\mathbf{E}$ через

замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри поверхности. Коэффициент пропорциональности зависит от выбора системы единиц. В гауссовой системе, используемой обычно в теоретической физике, он равен 4π. Следовательно,

$$\oint_f E_n\,df = 4\pi \sum e. \qquad (42.1)$$

Если распределение зарядов внутри поверхности f охарактеризовать с помощью плотности заряда $\rho = \rho(\mathbf{r})$, теореме Гаусса можно придать вид

$$\oint_f E_n\,df = 4\pi \int_V \rho\,dV, \qquad (42.2)$$

где V — объем, ограниченный поверхностью f.

Применив к левой части формулы (42.2) теорему Остроградского — Гаусса (см. (XI. 13)), придем к соотношению

$$\int_V \nabla\mathbf{E}\,dV = 4\pi \int_V \rho\,dV.$$

Последнее соотношение должно выполняться для любого произвольно выбранного объема V. Это возможно только в том случае, если в каждой точке поля

$$\nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (42.3)$$

Выразив в формуле (42.3) напряженность поля через потенциал согласно (41.5), получим

$$\nabla(\nabla\varphi) = -4\pi\rho.$$

В Приложении XI показано (см. (XI. 38)), что $\nabla(\nabla\varphi) = \Delta\varphi$, где Δ — оператор Лапласа. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \qquad (42.4)$$

которое называют *уравнением Пуассона*. В развернутом виде это уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \qquad (42.5)$$

Уравнение Пуассона позволяет по заданному распределению зарядов в пространстве (по заданной

функции ρ) найти потенциал в каждой точке поля. Зная φ, можно по формуле (41.5) определить $\mathbf{E}$.

Для точек поля, в которых $\rho=0$, уравнение (42.4) имеет вид

$$\Delta\varphi=0. \qquad (42.6)$$

Соотношение (42.6) называется *уравнением Лапласа*.

В соответствии с формулой (41.10) решение уравнения (42.4) имеет вид

$$\varphi=\int\frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad (42.7)$$

где интегрирование распространяется на всю область, в которой распределены заряды, создающие поле. Это утверждение может быть доказано строго математически путем применения оператора Лапласа к интегралу (42.7).

Заметим, что выражение (42.7) будет удовлетворять уравнению Пуассона и в том случае, если к нему добавить произвольную постоянную ($\Delta\,\mathrm{const}=0$). Так что, вообще говоря, для того чтобы решение уравнения Пуассона было вполне определенным, необходимо задать граничные условия. Решение (42.7) (с $\mathrm{const}=0$) получается в том случае, если принять потенциал на бесконечности равным нулю.

Можно показать, что решение уравнения Пуассона при заданных граничных условиях является единственным. Однако это доказательство выходит за рамки данной книги.

Покажем, что функция $\varphi(\mathbf{r})=1/r$ удовлетворяет уравнению Лапласа (уравнению (42.6)) во всех точках, кроме $r=0$. Согласно (XI.51) $\nabla\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}=$ $=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Применим к этому выражению еще раз оператор ∇:

$$\Delta\frac{1}{r}=\nabla\left(\nabla\frac{1}{r}\right)=-\nabla\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}(\nabla\mathbf{r})-\mathbf{r}\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Согласно (XI. 49) $\nabla\mathbf{r}=3$. Следовательно,

$$\Delta\frac{1}{r}=-\frac{3}{r_3}-\mathbf{r}\left(-\frac{3}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r}\right)=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0,$$

что и требовалось доказать.

Можно найти значения $\Delta(1/r)$ во всех точках, включая и $r=0$. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что в случае точечного заряда e, помещающегося в начале координат, $\rho = e\delta(\mathbf{r})$, а потенциал $\varphi = e/r$. Подставив эти значения в уравнение (42.4) и сократив на e, придем к следующему математическому соотношению:

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \tag{42.8}$$

§ 43. Разложение поля по мультиполям

Рассмотрим систему зарядов, размещенную в ограниченном объеме, и исследуем поле, создаваемое такой системой на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы. Поместив начало координат внутри объема, занимаемого системой, получим для потенциала выражение

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}, \tag{43.1}$$

где по предположению $r \gg r_a$ (см. (41.8); мы опустили штрих при $\mathbf{r}_a$).

Разложим выражение (43.1) в ряд по степеням величин $\mathbf{r}_a/r$. Для этого выразим $\varphi(\mathbf{r})$ через компоненты векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_a$:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{\sum_i (x_i - x_{ai})^2}} \tag{43.2}$$

(индекс i пробегает значения 1, 2, 3, индекс a — значения $1, 2, \ldots, n$, где n — число зарядов в системе). Рассматривая величины $(-x_{ai})$ как малые приращения координат x_i, можно представить функцию (43.2) в виде

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \\ = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{\sum x_i^2}} + \sum_a \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{e_a}{\sqrt{\sum x_i^2}}\right)(-x_{ak}) + \\ + \frac{1}{2}\sum_a \sum_{k,m} \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_m}\left(\frac{e_a}{\sqrt{\sum x_i^2}}\right)(-x_{ak})(-x_{am}) + \ldots = \\ = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \tag{43.3}$$

(раскладывается в ряд каждое из слагаемых суммы (43.2)).

Выражение (43.3) называется разложением потенциала по мультиполям. Первый член разложения

$$\varphi_0 = \frac{\sum e_a}{r} \tag{43.4}$$

(мы заменили $\sqrt{\sum x_i^2}$ через r) имеет вид потенциала точечного заряда. Суммарный заряд $\sum e_a$ представляет собой мультиполь нулевого порядка (его называют также *монополем*). В случае, когда этот мультиполь отличен от нуля, член φ_0 вносит основной вклад в потенциал (43.2).

Чтобы выяснить вид мультиполя первого порядка, преобразуем второй член разложения (43.3) следующим образом:

$$\varphi_1 = \sum_a \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{e_a}{r}\right)(-x_{ak}) = -\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)\sum_a e_a x_{ak}.$$

Сумма $\sum\limits_a e_a x_{ak}$ представляет собой проекцию на k-ю координатную ось вектора

$$\mathbf{p} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a. \tag{43.5}$$

Этот вектор есть не что иное как дипольный момент системы зарядов[1]). Он и является *мультиполем первого порядка.*

Выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)$$

---

[1]) Если заряд распределен по объему системы с плотностью ρ, то дипольный момент определяется интегралом:

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r})\,\mathbf{r}\,dV. \tag{43.6}$$

Напомним, что для системы, суммарный заряд которой $\sum e_a$ равен нулю, дипольный момент не зависит от выбора начала координат. Действительно, перенеся начало координат в точку с $\mathbf{r} = \mathbf{b}$, мы получим для радиусов-векторов отложенных из нового начала координат, значения $\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a - \mathbf{b}$. Дипольный момент в новой системе равен $\mathbf{p}' = \sum e_a \mathbf{r}'_a = \sum\limits_a e_a \mathbf{r}_a - \sum e_a \mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{b}\sum e_a$. Так как $\sum e_a = 0$, получаем, что $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$.

дает k-ю компоненту градиента $1/r$. Таким образом,

$$\varphi_1 = -\sum_k \left(\nabla \frac{1}{r}\right)_{\text{пр. } x_k} \cdot p_k = -\mathbf{p}\nabla \frac{1}{r}. \qquad (43.7)$$

Формулу для φ_1 можно получить сразу в векторной форме, воспользовавшись тем обстоятельством, что согласно (XI.5) с точностью до членов первого порядка

$$f(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r})\,\delta\mathbf{r}.$$

Применим эту формулу к каждому слагаемому в (43.1), рассматривая $-\mathbf{r}_a$ как $\delta\mathbf{r}$. В результате получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_a \frac{e_a}{r} - \sum_a e_a \mathbf{r}_a \nabla \frac{1}{r}. \qquad (43.8)$$

Первое слагаемое совпадает с (43.4), второе — с (43.7).

Отметим, что $\nabla(1/r)$ пропорционален $1/r^2$. Следовательно, слагаемые второй суммы в (43.8) будут по сравнению со слагаемыми первой суммы величинами порядка r_a/r.

Вычислив $\nabla(1/r)$ и подставив его в (43.7), придем к выражению для *потенциала поля диполя:*

$$\varphi_1 = -\mathbf{p}\nabla \frac{1}{r} = -\mathbf{p}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{\mathbf{pr}}{r^3}. \qquad (43.9)$$

Теперь найдем напряженность поля диполя:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi_1 = -\nabla\left(\frac{\mathbf{pr}}{r^3}\right) = -(\mathbf{pr})\nabla\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3}\nabla(\mathbf{pr})$$

(см. (XI. 25)). Воспользовавшись формулами (XI. 51) и (XI. 37), получим

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{pr})}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{r^3}\{[\mathbf{p}[\nabla\mathbf{r}]] + [\mathbf{r}[\nabla\mathbf{p}]] + (\mathbf{r}\nabla)\mathbf{p} + (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{r}\}.$$

Рассмотрим выражение в фигурных скобках: $[\nabla\mathbf{r}] = 0$ (см. (XI. 50)), $[\nabla\mathbf{p}] = 0$, так как $\mathbf{p}$ не зависит от $\mathbf{r}$; $(\mathbf{r}\nabla)\mathbf{p} = 0$ по той же причине. Таким образом, из четырех слагаемых отлично от нуля только последнее, которое согласно (XI. 34) равно $\mathbf{p}$. Итак,

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{pr})}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} = \frac{3\mathbf{e}_r(\mathbf{pe}_r) - \mathbf{p}}{r^3}, \qquad (43.10)$$

где $\mathbf{e}_r$ — орт радиуса-вектора $\mathbf{r}$.

Отметим, что поле диполя обладает осевой симметрией относительно направления $\mathbf{p}$.

Может случиться, что не только суммарный заряд $\sum e_a$, но и дипольный момент $\mathbf{p} = \sum e_a \mathbf{r}_a$ будет равен нулю. Это имеет место, например, для изображенной на рис. 43.1 системы зарядов, называемой *квадруполем*. В этом случае поле определяется следующим членом разложения функции (43.1), квадратичным относительно величин $\mathbf{r}_a/r$.

Запишем φ_2 следующим образом (см. (43.3)):

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\sum_a \sum_{k,m} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m}\left(\frac{e_a}{r}\right) x_{ak} x_{am} = \\ = \frac{1}{2}\sum_{k,m} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m}\left(\frac{1}{r}\right)\left\{\sum_a e_a x_{ak} x_{am}\right\}. \qquad (43.11)$$

Величина, стоящая в фигурных скобках, есть k, m-я компонента симметричного тензора второго ранга (см. Приложение X). Этот тензор можно было бы принять в качестве соответствующего мультиполя. Однако, как мы покажем ниже, из девяти компонент этого тензора независимыми являются не шесть компонент (как это бывает у симметричного тензора), а только пять. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, тензор, характеризующий свойство системы, определяющее φ_2, записывают в ином виде. В предыдущем параграфе мы видели, что функция $1/r$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. что

Рис. 43.1

$$\Delta \frac{1}{r} = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\frac{1}{r} = 0$$

(по предположению $r \gg r_a$, так что $r=0$ исключается из рассмотрения). Легко убедиться в том, что эту формулу можно написать в виде

$$\sum_{k,m} \delta_{km} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m}\frac{1}{r} = 0.$$

Умножим полученное нами соотношение на $e_a r_a^2/6$ и просуммируем затем по a. В результате

получим

$$\frac{1}{6}\sum_a e_a r_a^2 \sum_{k,m} \delta_{km} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} \frac{1}{r} = 0,$$

что можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sum_{k,m} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} \frac{1}{r} \left\{ \sum_a \frac{1}{3} e_a r_a^2 \delta_{km} \right\} = 0.$$

Вычтя полученное выражение из (43.11), придадим формуле для φ_2 вид

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\sum_{k,m} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} \frac{1}{r} \left\{ \sum_a e_a \left(x_{ak} x_{am} - \frac{1}{3} r_a^2 \delta_{km} \right) \right\}. \tag{43.12}$$

Совокупность величин

$$Q_{km} = \sum_a e_a (3x_{ak} x_{am} - r_a^2 \delta_{km}) \tag{43.13}$$

называется *тензором квадрупольного момента системы*. Вычислим след этого тензора, т. е. сумму его диагональных компонент:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(Q_{km}) = \sum_k Q_{kk} = \sum_k \sum_a e_a (3x_{ak}^2 - r_a^2) = \\ = \sum_a e_a \sum_k (3x_{ak}^2 - r_a^2) = \\ = \sum_a e_a \left\{ 3\sum_k x_{ak}^2 - 3r_a^2 \right\} = 0. \end{aligned} \tag{43.14}$$

Равенство нулю $\mathrm{Sp}(Q_{km})$ означает, что из трех диагональных компонент тензора Q_{km} независимыми являются только две, а следовательно, всего независимых компонент — пять.

Если привести тензор Q_{km} к главным осям, то в силу условия (43.14) независимыми будут только два из трех главных значений. Если система зарядов обладает осью симметрии порядка выше второго, то эта ось (обозначим ее буквой z) будет одной из главных осей тензора Q_{km}, положение двух других главных осей будет произвольным. В этом случае, очевидно $Q_{xx} = Q_{yy}$ и в силу (43.14)

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz}. \tag{43.15}$$

Главное значение Q_{zz} называют в этом случае просто *квадрупольным моментом системы*. Можно показать, что, когда суммарный заряд и дипольный момент системы равны нулю, квадрупольный момент не зависит от выбора начала координат.

Применив обозначение (43.13), потенциал поля, обусловленного квадруполем, можно записать следующим образом:

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} \sum_{k,\,m} Q_{km} \frac{\partial^2}{\partial x_k \, \partial x_m} \frac{1}{r}. \tag{43.16}$$

Вычислим вторые производные, входящие в это выражение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \, \partial x_m} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_m} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{x_m}{r^3} \right) = -\frac{\delta_{km}}{r^3} + \frac{3 x_m x_k}{r^5}$$

$(\partial x_m / \partial x_k = \delta_{km})$. Подставим эти значения производных в (43.16):

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} \sum_{k,\,m} \frac{Q_{km}}{r^3} \left(\frac{3 x_m x_k}{r^2} - \delta_{km} \right). \tag{43.17}$$

Из (43.17) следует, что потенциал квадруполя убывает с расстоянием как $1/r^3$. Напомним, что потенциал монополя убывает по закону $1/r$ (см. (43.4)), а потенциал диполя — по закону $1/r^2$ (см. (43.9)). Вообще потенциал мультиполя n-го порядка убывает с расстоянием по закону $1/r^{n+1}$.

Итак, поле системы зарядов можно представить как наложение полей, создаваемых мультиполями разных порядков:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots = \\ = \frac{\sum e_a}{r} - \mathbf{p} \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{6} \sum Q_{km} \frac{\partial^2}{\partial x_k \, \partial x_m} \frac{1}{r} + \ldots$$

Мультиполи более высоких порядков мы не будем рассматривать. Отметим лишь, что мультиполь третьего порядка называется октуполем. В качестве примера октуполя можно указать систему из восьми одинаковых по величине разноименных зарядов, размещенных в вершинах куба таким образом, что ближайшими соседями оказываются заряды разного знака.

§ 44. Поле в диэлектриках

До сих пор мы рассматривали электростатическое поле, создаваемое заданной системой зарядов в пустоте. При этом предполагалось, что заряды, создающие поле, могут перемещаться на макроскопические расстояния (например, в пределах всего проводящего тела). Такие заряды мы будем называть *свободными*.

В случае поля, возбуждаемого под воздействием свободных зарядов в диэлектриках, положение сильно усложняется, так как на поле свободных зарядов накладывается поле, создаваемое зарядами, входящими в состав атомов и молекул диэлектрика. Поскольку эти заряды не могут покидать пределы атомов и молекул, в состав которых они входят, их называют *связанными*.

Если обозначить поле свободных зарядов символом $\mathbf{E}_{своб}$, а поле связанных зарядов — символом $\mathbf{E}_{связ}$, то напряженность результирующего поля $\mathbf{E}_{рез}$ можно представить в виде

$$\mathbf{E}_{рез} = \mathbf{E}_{своб} + \mathbf{E}_{связ}. \qquad (44.1)$$

Даже если свободные заряды неподвижны, поле (44.1) не будет стационарным (т. е. не зависящим от времени), так как связанные заряды совершают движение внутри молекул и, кроме того, участвуют вместе с молекулами в тепловом движении. Таким образом, очевидно, что поле $\mathbf{E}_{связ}$ есть быстропеременная функция времени. Кроме того, $\mathbf{E}_{связ}$ сильно меняется в пространстве между двумя соседними молекулами. Оба вида зависимости (от времени и от точки в промежутке между молекулами) исчезают, если рассматривать значение $\mathbf{E}_{связ}$, усредненное, во-первых, по промежутку времени, много большему, чем период внутримолекулярного движения и тепловых колебаний, и, во-вторых, по объему, значительно превосходящему объем одной молекулы. Следовательно, поле $\langle\mathbf{E}_{связ}\rangle$ будет стационарным. Кроме того, оно плавно меняется в пределах объема, включающего много молекул. Поле $\langle\mathbf{E}_{связ}\rangle$ называют *макроскопическим*, в отличие от микроскопического поля $\mathbf{E}_{связ}$.

Мы будем называть напряженностью поля в диэлектрике макроскопическую величину

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{своб} + \langle\mathbf{E}_{связ}\rangle. \qquad (44.2)$$

В отсутствие внешнего поля (т. е. поля свободных зарядов) поле $\langle \mathbf{E}_{\text{связ}} \rangle$ обычно равно нулю. Под воздействием внешнего поля средние положения связанных зарядов смещаются тем сильнее, чем больше действующее на них поле. В результате поле $\langle \mathbf{E}_{\text{связ}} \rangle$ становится отличным от нуля. При вычислении поля (44.2) положение усложняется тем, что среднее смещение связанных зарядов определяется не полем $\mathbf{E}_{\text{своб}}$, а результирующим полем $\mathbf{E}$, которое включает в себя $\langle \mathbf{E}_{\text{связ}} \rangle$.

Электрическое состояние диэлектрика принято характеризовать дипольным моментом единицы объема диэлектрика, который называют *поляризованностью* и обозначают символом $\mathbf{P}$. Очевидно, что $\mathbf{P}$ можно определить как

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \qquad (44.3)$$

где ΔV — физически бесконечно малый объем[1]), $\mathbf{p}_i$ — дипольный момент отдельной молекулы, суммирование осуществляется по всем молекулам, заключенным в объеме ΔV.

Определив $\mathbf{P}$ таким образом, мы по существу произвели то усреднение, о котором шла речь выше в связи с обсуждением $\mathbf{E}_{\text{связ}}$ ($\mathbf{P}$ — макроскопическая величина, $\mathbf{p}_i$ — микроскопическая).

При воздействии на диэлектрик электрического поля связанные заряды смещаются (оставаясь каждый в пределах «своей» молекулы) — положительные по полю, отрицательные в противоположную сторону. В результате на поверхности диэлектрика образуются связанные заряды. Кроме того, могут возникать также и объемные связанные заряды.

Найдем выражение для $\rho_{\text{связ}}$ — объемной плотности связанных зарядов. Выделим мысленно в диэлектрике физически бесконечно малый объем ΔV. Пусть в отсутствие поля связанные заряды e_α ($\alpha = 1, 2, \ldots$), заключенные в этом объеме, помещаются в точках,

---

[1]) Физически бесконечно малым называют объем ΔV, заключающий в себе достаточно большое число молекул для того, чтобы можно было пренебречь дискретностью вещества, и вместе с тем достаточно малый для того, чтобы макроскопические величины, например $\mathbf{E}$ или $\mathbf{P}$, можно было считать в пределах ΔV постоянными.

определяемых радиусами-векторами $\mathbf{r}_{\alpha 0}$. Поскольку в отсутствие поля диэлектрик не поляризован, выражение $\sum e_\alpha \mathbf{r}_{\alpha 0}$ равно нулю (сумма берется по ΔV). Действительно, с точностью до $1/\Delta V$ эта сумма совпадает с поляризованностью $\mathbf{P}$, которая у неполяризованного диэлектрика равна нулю.

Предположим, что при включении поля связанные заряды смещаются на отрезки $\Delta \mathbf{r}_\alpha$ (отметим, что эти отрезки много меньше линейных размеров объема ΔV). В результате возникнет поляризация, характеризуемая вектором

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_\alpha e_\alpha (\mathbf{r}_{\alpha 0} + \Delta \mathbf{r}_\alpha) = \frac{1}{\Delta V} \sum e_\alpha \Delta \mathbf{r}_\alpha. \quad (44.4)$$

Связанные заряды, входящие в состав диэлектрика, можно разбить на несколько групп, в каждой из которых величина заряда e_α и смещение $\Delta \mathbf{r}_\alpha$ одинаковы. Пронумеруем такие группы индексом β. Количество зарядов группы β, приходящееся на единицу объема диэлектрика, обозначим n_β. Тогда поляризованность можно написать следующим образом:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_\beta e_\beta \Delta \mathbf{r}_\beta n_\beta \Delta V = \sum_\beta n_\beta e_\beta \Delta \mathbf{r}_\beta \quad (44.5)$$

Рис. 44.1

($n_\beta \Delta V$ — число зарядов группы β, заключенных в объеме ΔV).

Вычислим алгебраическую сумму связанных зарядов, пересекающих при включении поля границу объема ΔV. На рис. 44.1 показан элемент df поверхности, ограничивающей ΔV. Элемент df пересекут (и выйдут наружу или войдут внутрь) те заряды группы с номером β, которые заключены в элементарном объеме величины $\Delta \mathbf{r}_\beta d\mathbf{f}$. Они унесут с собой заряд

$$n_\beta e_\beta \Delta \mathbf{r}_\beta \, d\mathbf{f}. \quad (44.6)$$

Это выражение является алгебраическим. Его знак зависит от знака e_β и от знака скалярного произведения $\Delta \mathbf{r}_\beta d\mathbf{f}$, т. е. от направления $\Delta \mathbf{r}_\beta$ по отношению

к внешней нормали к df (на рис. 44.1 она обозначена буквой $\mathbf{n}$).

Просуммировав выражение (44.6) по β, получим полный заряд, пересекающий df:

$$\sum_{\beta} n_{\beta} e_{\beta} \Delta \mathbf{r}_{\beta} \, d\mathbf{f} = \mathbf{P} \, d\mathbf{f} \qquad (44.7)$$

(см. (44.5)).

Проинтегрировав выражение (44.7) по поверхности f, найдем суммарный связанный заряд, выходящий из объема ΔV при включении поля. Таким образом, при включении поля объем ΔV, который был прежде нейтральным, приобретает связанный заряд

$$\Delta q_{\text{связ}} = -\int_{f} \mathbf{P} \, d\mathbf{f}$$

(приобретаемый заряд равен взятому с обратным знаком вышедшему наружу заряду). Применив теорему Остроградского — Гаусса, получим

$$\Delta q_{\text{связ}} = -\int_{\Delta V} \nabla \mathbf{P} \, dV = -\nabla \mathbf{P} \, \Delta V.$$

Отсюда для плотности связанных зарядов получается выражение

$$\rho_{\text{связ}} = -\nabla \mathbf{P}. \qquad (44.8)$$

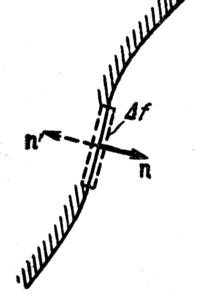


Рис. 44.2

С помощью формулы (44.8) можно найти и поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{\text{связ}}$. Для этого рассмотрим цилиндрический объем, заключенный между двумя бесконечно близкими поверхностями величины Δf, расположенными по разные стороны от поверхности диэлектрика (рис. 44.2). Связанный заряд $q_{\text{связ}}$, заключенный в этом объеме, можно представить либо в виде $\int \rho_{\text{связ}} \, dV$, либо в виде $\sigma_{\text{связ}} \Delta f$. Использовав формулу (44.8) и теорему Остроградского — Гаусса, можно написать

$$q_{\text{связ}} = \sigma_{\text{связ}} \Delta f = -\int \nabla \mathbf{P} \, dV = -\int P_{n'} \, df,$$

где $\mathbf{n}'$ — внешняя нормаль к поверхности цилиндра. Интеграл по поверхности можно разбить на три

части: интеграл по внешнему основанию цилиндра, который равен нулю, поскольку вне диэлектрика $\mathbf{P}=0$; интеграл по боковой поверхности цилиндра, которым можно пренебречь в силу бесконечной малости этой поверхности; и, наконец, интеграл по внутреннему основанию цилиндра. Последний равен $-P_{n'}\Delta f$, где $\mathbf{n}'$ — нормаль к поверхности, направленная внутрь диэлектрика. Если вместо $\mathbf{n}'$ взять внешнюю нормаль $\mathbf{n}$, то $-P_{n'}$ нужно заменить на $+P_n$. Таким образом, мы приходим к соотношению $\sigma_{\text{связ}}\Delta f = P_n\Delta f$, откуда

$$\sigma_{\text{связ}} = P_n. \tag{44.9}$$

Здесь P_n — проекция поляризованности $\mathbf{P}$ на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика.

Заметим, что заряды плотности, определяемой формулами (44.8) и (44.9), являются не воображаемыми, а вполне реальными зарядами.

Итак, при наличии диэлектриков на поле, создаваемое свободными зарядами (их плотность мы обозначим ρ), накладывается поле связанных поверхностных (см. (44.9)) и объемных (см. (44.8)) зарядов. Следовательно, потенциал в точке, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r}$, будет равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_{V_\rho} \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{R} + \int\limits_{f_\text{д}} \frac{P_n(\mathbf{r}')\,df'}{R} - \int\limits_{V_\text{д}} \frac{\nabla'\mathbf{P}(\mathbf{r}')\,dV'}{R}, \tag{44.10}$$

где для краткости применено обозначение $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$; dV' — элементарный объем, взятый в окрестности точки $\mathbf{r}'$, df' — элемент поверхности диэлектрика, взятый в окрестности точки $\mathbf{r}'$; дивергенция от $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ берется по штрихованным координатам, поэтому оператор ∇ снабжен штрихом (см. (XI.52)). Первый интеграл берется по всему объему, где ρ отлична от нуля, второй интеграл берется по всем поверхностям, ограничивающим диэлектрик, и, наконец, третий интеграл берется по всему объему диэлектрика.

§ 45. Описание поля в диэлектриках

Если $\nabla\mathbf{P}$ отлична от нуля, каждый элементарный объем диэлектрика эквивалентен точечному заряду величины $-\nabla\mathbf{P}dV$ и вносит соответствующий вклад

в макроскопическое поле **E**. Поэтому при наличии диэлектриков уравнение (42.3) нужно писать в виде

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi (\rho_{своб} + \rho_{связ}) = 4\pi (\rho - \nabla \mathbf{P}) \qquad (45.1)$$

(под ρ подразумевается плотность свободных зарядов). В таком виде уравнение малопригодно для нахождения **E**, так как определяет **E** не только через плотность свободных зарядов, но и через характер поляризации диэлектрика. Поляризация же есть в свою очередь функция **E**.

Легко заметить, что если ввести вспомогательную величину

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \qquad (45.2)$$

то для нее будет справедливо уравнение

$$\nabla \mathbf{D} = 4\pi\rho, \qquad (45.3)$$

т. е. $\nabla \mathbf{D}$ определяется только плотностью свободных зарядов.

Величину **D** называют *электрической индукцией*.

Сопоставление уравнений (45.1) и (45.3) показывает, что операция нахождения **D** гораздо проще, чем операция нахождения **E**. Однако от величины **D** было бы мало проку, если бы не то обстоятельство, что в большинстве практически важных случаев **D** оказывается пропорциональной **E**. Поэтому удается осуществить «обходный маневр»: вместо основной характеристики поля **E** вычисляют сначала вспомогательную величину **D**, а затем совершают переход от **D** к **E**.

Введение величины **D** целесообразно также по той причине, что многие формулы, написанные с использованием **D**, оказываются много проще, чем они выглядели бы, будучи выраженными через **E** и **P**.

Опыт дает, что во многих имеющих практический интерес случаях поляризованность пропорциональна напряженности поля

$$\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E} \qquad (45.4)$$

(мы пока ограничимся рассмотрением изотропных диэлектриков). Величина $\varkappa$ называется *диэлектрической восприимчивостью* вещества. Она всегда положительна.

Подставив (45.4) в (45.2), найдем, что

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\varkappa\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}, \qquad (45.5)$$

где

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa \qquad (45.6)$$

есть *диэлектрическая проницаемость* вещества.

Таким образом, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ во многих случаях пропорциональны друг другу. Этим и обусловлена целесообразность введения $\mathbf{D}$.

Основываясь на уравнении (45.3), можно, казалось бы, заключить, что $\mathbf{D}$ определяется только плотностью свободных зарядов. Однако это не так. Одного уравнения (45.3) для определения $\mathbf{D}$ недостаточно. Чтобы отчетливее это понять, вспомним, как осуществляется нахождение $\mathbf{E}$ в отсутствие диэлектриков. Кроме уравнения $\nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho$, мы, воспользовавшись тем, что $[\nabla\mathbf{E}] = 0$, положили $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Подставив это выражение в уравнение для дивергенции, мы пришли к уравнению Пуассона: $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$. Решение этого уравнения позволяет найти φ, а затем и $\mathbf{E}$.

Если идти тем же путем при нахождении $\mathbf{D}$, нужно в дополнение к (45.3) рассмотреть уравнение

$$[\nabla\mathbf{D}] = [\nabla, \varepsilon\mathbf{E}] = [\nabla\varepsilon, \mathbf{E}] + \varepsilon[\nabla\mathbf{E}] = [\nabla\varepsilon, \mathbf{E}]$$

(мы применили формулу (XI. 27) и приняли во внимание, что $[\nabla\mathbf{E}] = 0$). Это уравнение переходит в $[\nabla\mathbf{D}] = 0$ только в том случае, когда $\nabla\varepsilon = 0$, т. е. диэлектрик однороден. В общем случае $[\nabla\mathbf{D}]$ зависит от $\mathbf{E}$, т. е. в конечном счете от связанных зарядов.

Однако, хотя $\mathbf{D}$, вообще говоря, зависит от связанных зарядов, совокупность уравнений

$$[\nabla\mathbf{E}] = 0, \quad \nabla\mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

позволяет по известному распределению в пространстве свободных зарядов вычислить $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$.

Воспользовавшись соотношением (45.4), можно выяснить, при каких условиях $\rho_{связ}$ отлична от нуля. Подставим значение (45.4) в формулу (44.8):

$$\rho_{связ} = -\nabla\mathbf{P} = -\nabla(\varkappa\mathbf{E}) = -\varkappa\nabla\mathbf{E} - \mathbf{E}\nabla\varkappa \qquad (45.7)$$

(см. (XI. 26)). Согласно (45.1) $\nabla\mathbf{E} = 4\pi(\rho_{своб} + \rho_{связ})$. Заменив этим значением $\nabla\mathbf{E}$ в формуле (45.7), получим

$$\rho_{связ} = -\varkappa 4\pi(\rho_{своб} + \rho_{связ}) - \mathbf{E}\nabla\varkappa.$$

Теперь разрешим получившееся уравнение относительно $\rho_{связ}$:

$$\rho_{связ} = -\frac{1}{\varepsilon}[4\pi\varkappa\rho_{своб} + \mathbf{E}\nabla\varkappa].$$

Из найденного нами соотношения следует, что $\rho_{связ}$ отлична от нуля, во-первых, в тех точках, где отлична от нуля $\rho_{своб}$, и, во-вторых, в тех точках, где $\nabla\varkappa \neq 0$, т. е. в местах неоднородности диэлектрика. Отметим, что в однородно-поляризованном диэлектрике ($\mathbf{P} = \text{const}$) объемные связанные заряды не возникают.

Рассмотрим поле в однородном диэлектрике. Допустим, что в отсутствие диэлектрика при данном распределении свободных зарядов возникает поле, характеризуемое напряженностью $\mathbf{E}_0$ и потенциалом φ_0. Мы знаем, что $\mathbf{E}_0$ и φ_0 являются решениями уравнений

$$\nabla\mathbf{E}_0 = 4\pi\rho, \tag{45.8}$$

$$\Delta\varphi_0 = -4\pi\rho \tag{45.9}$$

(см. (42.3) и (42.4)).

Теперь, не изменяя расположения свободных зарядов (т. е. ρ), заполним все пространство, в котором поле отлично от нуля, однородным ($\varepsilon = \text{const}$) изотропным диэлектриком. Тогда напряженность поля станет равной $\mathbf{E}$, а потенциал примет значение φ. Напишем уравнения для $\mathbf{E}$ и φ. Согласно (45.3)

$$\nabla\mathbf{D} = \nabla(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho. \tag{45.10}$$

Заменив в этом уравнении $\mathbf{E}$ через $-\nabla\varphi$ и приняв во внимание, что $\varepsilon = \text{const}$, можно написать

$$-\nabla(\varepsilon\nabla\varphi) = -\nabla^2(\varepsilon\varphi) = 4\pi\rho,$$

или

$$\Delta(\varepsilon\varphi) = -4\pi\rho. \tag{45.11}$$

Сравнение (45.10) с (45.8) и (45.11) с (45.9) показывает, что уравнение для $\varepsilon\mathbf{E}$ совпадает с уравнением для $\mathbf{E}_0$, а уравнение для $\varepsilon\varphi$ — с уравнением для φ_0. Отсюда следует, что заполнение пространства, в котором имеется поле, однородным изотропным диэлектриком приводит к уменьшению как напряженности поля, так и потенциала в ε раз. В частности, для поля точечного заряда, помещающегося в однородном

диэлектрике,

$$\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{r}}{\varepsilon r^3},\quad \varphi=\frac{e}{\varepsilon r}. \tag{45.12}$$

Отметим, что согласно (45.11) уравнение Пуассона (42.4) для поля в однородном изотропном диэлектрике выглядит следующим образом:

$$\Delta\varphi=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho. \tag{45.13}$$

Приведем без вывода[1]) условия, которым должны удовлетворять **E** и **D** на границе двух диэлектриков:

$$\begin{gathered} E_{\tau 1}=E_{\tau 2},\quad \varepsilon_1 E_{n1}=\varepsilon_2 E_{n2},\\ D_{n1}=D_{n2},\quad D_{\tau 1}/\varepsilon_1=D_{\tau 2}/\varepsilon_2 \end{gathered} \tag{45.14}$$

(индекс τ применен для обозначения тангенциальной составляющей вектора, индекс n — для обозначения нормальной составляющей).

Нахождение поля путем решения уравнений (42.4), (45.3) и т. п. в общем случае представляет очень трудную задачу. В случаях, обладающих симметрией, удается установить вид поля, не решая уравнений. Покажем это на следующем примере. Пусть имеется плоская граница двух полубесконечных однородных и изотропных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. В первом диэлектрике на расстоянии a от границы имеется точечный заряд q. Требуется найти поле в обоих диэлектриках.

Поле в первом диэлектрике составим из полей точечного заряда q и его зеркального изображения — воображаемого заряда q'. Это допущение удовлетворяет основному условию, что в первом диэлектрике имеется только один источник **D** — заряд q (q' лежит вне первого диэлектрика). Итак, будем искать потенциал в первом диэлектрике в виде

$$\varphi_1=\frac{q}{\varepsilon_1 r}+\frac{q'}{\varepsilon_1 r'} \tag{45.15}$$

(значения r и r' ясны из рис. 45.1).

Поле во втором диэлектрике представим как поле воображаемого заряда q'', помещенного там же, где q.

[1]) Вывод можно найти во многих учебниках общей физики.

Это допущение согласуется с тем фактом, что во втором диэлектрике нет источников **D** (q'' лежит вне второго диэлектрика). Таким образом, будем искать потенциал во втором диэлектрике в виде

$$\varphi_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r}. \tag{45.16}$$

Попробуем подобрать значения q' и q'' так, чтобы удовлетворялись граничные условия (45.14) для **D**. По сделанным нами предположениям **D** имеет в первом и втором диэлектриках значения:

$$\mathbf{D}_1 = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{q'\mathbf{r}'}{r'^3},$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{q''\mathbf{r}}{r^3}. \tag{45.17}$$

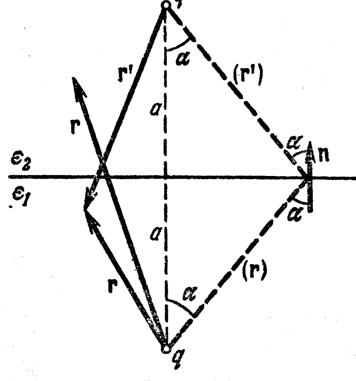


Рис. 45.1

На границе диэлектриков $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'|$. Следовательно,

$$\mathbf{D}_{1\,\text{гр}} = \frac{q\mathbf{r} + q'\mathbf{r}'}{r^3},$$

$$\mathbf{D}_{2\,\text{гр}} = \frac{q''\mathbf{r}}{r^3}. \tag{45.18}$$

Найдем нормальные составляющие векторов в (45.18). Вектор **n** направим от первого диэлектрика ко второму. Приняв во внимание, что проекция **r** на **n** равна a, а проекция **r**′ равна $-a$, получим

$$D_{1n} = \frac{q - q'}{r^3} a, \quad D_{2n} = \frac{q''}{r^3} a.$$

С учетом того, что тангенциальные составляющие векторов **r** и **r**′ одинаковы: $r_\tau = r'_\tau$, можно написать

$$D_{1\tau} = \frac{q + q'}{r^3} r_\tau, \quad D_{2\tau} = \frac{q''}{r^3} r_\tau. \tag{45.19}$$

Из равенства $D_{1n} = D_{2n}$ вытекает, что

$$q - q' = q''. \tag{45.20}$$

Из соотношения $D_{1\tau}/\varepsilon_1 = D_{2\tau}/\varepsilon_2$ (см. (45.14)) после подстановки в него значений (45.19) получается, что

$$q + q' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q''. \tag{45.21}$$

Решив совместно уравнения (45.20) и (45.21), найдем значения q' и q'', удовлетворяющие граничным условиям:

$$q' = q\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad q'' = q\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{45.22}$$

Нам удалось «сконструировать» функции $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ (см. (45.17)), каждая из которых в своей области удовлетворяет уравнению $\nabla\mathbf{D} = 4\pi\rho$. Кроме того, эти функции удовлетворяют граничным условиям. Значит функции (45.17) и соответственно (45.15) и (45.16) будут (после подстановки в них значений (45.22) для q' и q'') решениями задачи. В силу теоремы о единственности (см. § 42) никаких других решений не существует.

§ 46. Поле в анизотропных диэлектриках

В анизотропных диэлектриках направления векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$, вообще говоря, не совпадают (см. Приложение X). Связь между компонентами этих векторов дается соотношениями

$$P_i = \sum_{k=1}^{3} \varkappa_{ik} E_k \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{46.1}$$

где $\varkappa_{ik}$ — симметричный тензор второго ранга, называемый тензором диэлектрической восприимчивости.

Согласно (45.2) $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ или, в компонентах,

$$D_i = E_i + 4\pi P_i.$$

Подставив P_i из (46.1), получим

$$D_i = E_i + 4\pi \sum_k \varkappa_{ik} E_k.$$

Если представить E_i в виде $\sum_k \delta_{ik} E_k$, можно написать

$$D_i = \sum_k \delta_{ik} E_k + 4\pi \sum_k \varkappa_{ik} E_k = \sum_k (\delta_{ik} + 4\pi\varkappa_{ik}) E_k.$$

Величины

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\varkappa_{ik}, \tag{46.2}$$

очевидно, суть компоненты симметричного тензора второго ранга. Его называют тензором диэлектриче-

ской проницаемости (или, кратко, диэлектрическим тензором). С его помощью связь между векторами **D** и **E** может быть написана в виде

$$D_i = \sum_k \varepsilon_{ik} E_k \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{46.3}$$

Симметричный тензор имеет шесть независимых компонент. Если его привести к главным осям, он выглядит следующим образом:

$$(\varepsilon_{ik}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что поскольку главные значения тензора $\varkappa_{ik}$ положительны, главные значения тензора ε_{ik} всегда больше единицы.

В кристаллах триклинной, моноклинной и ромбической систем все три главные значения тензора ε_{ik}, а следовательно, и полуоси тензорного эллипсоида различны. Такие кристаллы называются двухосными.

В кристаллах тетрагональной, ромбоэдрической и гексагональной систем два главных значения совпадают: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$. Тензорный эллипсоид в этом случае является эллипсоидом вращения. Такие кристаллы называются одноосными.

В кристаллах кубической системы все три главные значения тензора ε_{ik} одинаковы, так что тензор имеет вид $\varepsilon\delta_{ik}$. Тензорный эллипсоид в этом случае вырождается в сферу. По своим диэлектрическим (и оптическим) свойствам такие кристаллы не отличаются от изотропных тел.

Глава IX

МАГНИТОСТАТИКА

§ 47. Стационарное магнитное поле в пустоте

На точечный заряд e, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, действует в магнитном поле сила[1])

$$\mathbf{F}=\frac{e}{c}[\mathbf{vB}] \qquad (47.1)$$

(c — скорость света в вакууме). Векторная величина $\mathbf{B}$, называемая *магнитной индукцией*, является основной (силовой) характеристикой магнитного поля. Соотношение (47.1) можно рассматривать как определение величины $\mathbf{B}$.

Вследствие отсутствия в природе магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам e[2]), линии вектора $\mathbf{B}$ не имеют ни начала, ни конца. Поэтому поток вектора $\mathbf{B}$ через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$\oint_f B_n\,df=0. \qquad (47.2)$$

Формула (47.2) является аналитическим выражением теоремы Гаусса для вектора магнитной индукции.

Воспользовавшись теоремой Остроградского — Гаусса, выражению (47.2) можно придать вид

$$\int_V \nabla\mathbf{B}\,dV=0. \qquad (47.3)$$

---

[1]) Сумму сил (41.1) и (47.1) называют силой Лоренца.

[2]) Исходя из того, что уравнения природы вообще и уравнения электродинамики в частности должны быть симметричными, Дирак высказал предположение, что в природе должны существовать магнитные заряды (монополи Дирака). Поиски этих зарядов пока не дали никаких результатов, так что вопрос о существовании монополей Дирака остается открытым.

Условие (47.3) должно выполняться для любого произвольно выбранного объема V. Это возможно лишь в том случае, если подынтегральная функция в каждой точке равна нулю. Таким образом, мы приходим к выводу, что дивергенция вектора магнитной индукции равна нулю в каждой точке поля:

$$\nabla\mathbf{B} = 0. \tag{47.4}$$

В векторном анализе доказывается (см. (XI.44)), что дивергенция ротора векторной функции всегда равна нулю. Поэтому магнитную индукцию можно представить как ротор некоторой векторной функции $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}]. \tag{47.5}$$

Функцию $\mathbf{A}$ называют *векторным потенциалом магнитного поля.*

Векторный потенциал, так же как и скалярный потенциал φ, определяется неоднозначно. Действительно, поскольку ротор градиента любой функции есть нуль (см. (XI.43)), добавление к векторному потенциалу величины $\nabla\psi$ (ψ — произвольная функция), не изменяет значения $[\nabla\mathbf{A}]$, т. е. $\mathbf{B}$. Таким образом, если $\mathbf{A}$ есть векторный потенциал, отвечающий данному магнитному полю, то и функция

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi \tag{47.6}$$

также будет векторным потенциалом данного поля.

Свойство (47.6) позволяет выбирать потенциал наиболее удобным образом, например, накладывать определенные условия на дивергенцию $\mathbf{A}$. Действительно, из (47.6) следует, что

$$\nabla\mathbf{A}' = \nabla\mathbf{A} + \nabla(\nabla\psi) = \nabla\mathbf{A} + \Delta\psi,$$

так что подбором ψ можно придать $\nabla\mathbf{A}'$ любое наперед заданное значение. В рамках магнитостатики мы будем выбирать ψ так, чтобы

$$\nabla\mathbf{A} = 0. \tag{47.7}$$

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим векторный потенциал однородного магнитного поля: $\mathbf{B} = \text{const} = \mathbf{B}_0$. Направим ось z вдоль $\mathbf{B}_0$. Тогда $B_x = B_y = 0$, $B_z = B_0$ и уравнение (47.5), написанное

в компонентах, будет иметь вид

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0,$$
$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0. \tag{47.8}$$

Видно, что этим уравнениям удовлетворяет, скажем, такое значение потенциала:

$$A_x = -B_0 y, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0. \tag{47.9}$$

На рис. 47.1, *а* изображены линии вектора **A**, имеющего компоненты (47.9).

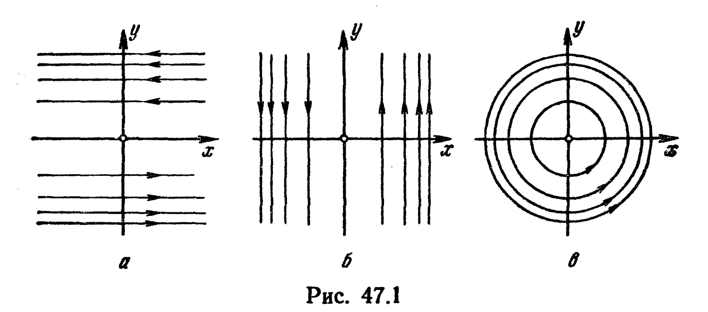


Рис. 47.1

Решение (47.9) не является единственным. Уравнениям (47.8) удовлетворяет также следующий потенциал:

$$A_x = 0, \quad A_y = B_0 x, \quad A_z = 0. \tag{47.10}$$

Линии **A** в этом случае показаны на рис. 47.1, *б*. Очевидно, что решением будет также

$$A_x = -\alpha B_0 y, \quad A_y = (1-\alpha) B_0 x, \quad A_z = 0,$$

где α — любое число. В частности, уравнениям (47.8) удовлетворяют

$$A_x = -\frac{1}{2} B_0 y, \quad A_y = \frac{1}{2} B_0 x, \quad A_z = 0. \tag{47.11}$$

Последнее решение можно представить в виде

$$A_x = \frac{1}{2}(B_y z - B_z y), \quad A_y = \frac{1}{2}(B_z x - B_x z),$$
$$A_z = \frac{1}{2}(B_x y - B_y x)$$

(напомним, что $B_x = B_y = 0$), откуда

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0\mathbf{r}] = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0\mathbf{R}], \tag{47.12}$$

где $\mathbf{R}$ — составляющая радиуса-вектора $\mathbf{r}$, перпендикулярная к оси z. Линии вектора $\mathbf{A}$, отвечающие (47.12), даны на рис. 47.1, *в*.

Все приведенные нами значения потенциала удовлетворяют условию (47.7). Отсюда заключаем, что уравнения (47.5) и (47.7) не полностью определяют $\mathbf{A}$. Для того чтобы определение векторного потенциала было однозначным, необходимо задать граничные условия для $\mathbf{A}$.

§ 48. Уравнение Пуассона для векторного потенциала

Из курса общей физики известно, что циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по любому замкнутому контуру Г, взятому в стационарном магнитном поле (в поле постоянных токов), пропорциональна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром:

$$\oint_{\Gamma} B_l\, dl = \frac{4\pi}{c} \sum i. \tag{48.1}$$

Формулу (48.1) мы будем рассматривать как соотношение, установленное опытным путем.

Введя плотность тока $\mathbf{j}$, сумму токов можно представить как поток вектора $\mathbf{j}$ через поверхность, ограниченную контуром Г. Тогда формула (48.1) примет вид

$$\oint_{\Gamma} B_l\, dl = \frac{4\pi}{c} \int_f \mathbf{j}\, d\mathbf{f}.$$

Преобразуем левую часть полученного нами соотношения по теореме Стокса. В результате получим

$$\int_f [\nabla\mathbf{B}]\, d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} \int_f \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \tag{48.2}$$

Предположим, что интегрирование слева и справа ведется по одной и той же поверхности (хотя равенство (48.2) выполняется и для различных поверхностей, лишь бы они опирались на один и тот же кон-

тур Г). Соотношение (48.2) должно выполняться для любой произвольно взятой поверхности f. Это возможно только в том случае, если в каждой точке поля

$$[\nabla \mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{48.3}$$

(напомним, что рассматривается поле постоянных токов).

Уравнение (48.3) играет в магнитостатике такую же основополагающую роль, как уравнение (42.3) в электростатике. Совместно с уравнением (47.4) оно позволяет вычислить поле заданных стационарных токов.

Подставим в формулу (48.3) вместо $\mathbf{B}$ ротор $\mathbf{A}$ (см. (47.5)):

$$[\nabla[\nabla \mathbf{A}]] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Согласно (XI.45) $[\nabla[\nabla \mathbf{A}]] = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$. Положив, как было условлено (см. (47.7)), $\nabla \mathbf{A} = 0$, получим для $\mathbf{A}$ дифференциальное уравнение

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{48.4}$$

Это векторное уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\Delta A_k = -\frac{4\pi}{c} j_k \quad (k = x,\ y,\ z), \tag{48.5}$$

каждое из которых аналогично уравнению Пуассона для φ (см. (42.4)). С математической точки зрения уравнения (42.4) и (48.5) тождественны. Следовательно, заменив в решении уравнения (42.4) φ на A_k, а ρ на j_k/c, мы получим решение уравнения (48.5). Приняв во внимание формулу (42.7), получим

$$A_k = \frac{1}{c}\int \frac{j_k(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (k = x,\ y,\ z), \tag{48.6}$$

где интегрирование распространяется на всю область, в которой текут токи, создающие поле.

Три выражения (48.6) можно объединить в одно векторное:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{48.7}$$

Формула (48.7) позволяет по известному распределению токов в пространстве вычислить векторный потенциал поля, создаваемого этими токами. В качестве примера рассмотрим поле прямого тока. Известно, что потенциал электрического поля, создаваемого тонкой бесконечно длинной равномерно заряженной нитью, имеет вид[1] (рассматривается поле вне нити)

$$\varphi(R) = -2\lambda \ln(R/R_0) = -2\rho\sigma \ln(R/R_0), \qquad (48.8)$$

где R — расстояние от нити, R_0 — расстояние до точек, потенциал которых принят за нуль (в данном случае нельзя положить $\varphi = 0$ на бесконечности, так как при такой нормировке потенциал при конечных R получается бесконечно большим), λ — линейная плотность заряда, которую, предположив, что заряд распределен равномерно по всему поперечному сечению нити, можно представить в виде $\rho\sigma$ (σ — площадь поперечного сечения нити).

Теперь допустим, что имеется тонкий бесконечно длинный прямой провод, по которому течет равномерно распределенный по сечению σ ток плотности j. Направив ось z вдоль провода, будем иметь $j_x = j_y = 0$, $j_z = j$. Основываясь на идентичности уравнений (42.4) и (48.5), можно получить выражение для A_z, заменив в (48.8) ρ через $j_z/c = j/c$:

$$A_z(R) = -\frac{2j\sigma}{c} \ln(R/R_0) = -\frac{2i}{c} \ln(R/R_0), \qquad (48.9)$$

где $i = j\sigma$ — сила тока, текущего по проводу. Подстановка в (48.8) $j_x = 0$ и $j_y = 0$ вместо ρ дает для компонент A_x и A_y нулевые значения. Следовательно, вектор $\mathbf{A}$ можно записать в виде

$$\mathbf{A} = -\frac{2i}{c} \ln(R/R_0)\, \mathbf{e}_z, \qquad (48.10)$$

где $\mathbf{e}_z$ — орт оси z.

Взяв ротор от выражения (48.10), найдем $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] = -\frac{2i}{c}\left[\nabla,\ \ln\frac{R}{R_0}\mathbf{e}_z\right] = -\frac{2i}{c}\left[\nabla \ln\frac{R}{R_0},\ \mathbf{e}_z\right] - \frac{2i}{c}\ln\frac{R}{R_0}[\nabla \mathbf{e}_z]$$

(мы воспользовались формулой (XI.27)). Поскольку

[1]) С помощью теоремы Гаусса легко найти, что $E(R) = 2\lambda/R$. Следовательно, $d\varphi/dR = -2\lambda/R$. Интегрирование приводит к формуле (48.8).

$\mathbf{e}_z = \text{const}$, второй член равен нулю. Так как $\nabla \ln(R/R_0) = \mathbf{R}/R^2$,

$$\mathbf{B} = -\frac{2i}{c}\left[\frac{\mathbf{R}}{R^2}, \mathbf{e}_z\right] = \frac{2i}{cR^2}[\mathbf{e}_z, \mathbf{R}]. \qquad (48.11)$$

В соответствии с полученным нами результатом вектор $\mathbf{B}$ в каждой точке лежит в плоскости, перпендикулярной к проводу, и направлен по касательной к окружности, охватывающей провод. Модуль $\mathbf{B}$ равен

$$B = \frac{2i}{cR}.$$

§ 49. Поле соленоида

Вычислим поле бесконечного соленоида, представив этот соленоид как бесконечный цилиндр радиуса a, в поверхностном слое которого толщины b ($b \ll a$) течет ток плотности j (bj эквивалентно ni, где i — сила тока в соленоиде, n — число витков на единицу длины).

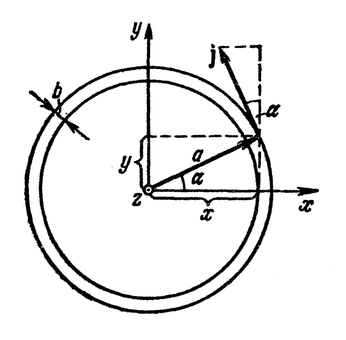


Рис. 49.1

Выберем прямоугольные координатные оси, совместив ось z с геометрической осью соленоида (рис. 49.1). Проекции вектора $\mathbf{j}$ на координатные оси равны

$$j_x = -j \sin\alpha = -j\frac{y}{a},$$
$$j_y = j\cos\alpha = j\frac{x}{a}, \quad j_z = 0. \qquad (49.1)$$

Из $j_z = 0$ сразу следует, что $A_z = 0$. В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе составляющая A_x совпадает с потенциалом φ, создаваемым зарядом, который распределен в поверхностном слое цилиндра с плотностью $\rho_x = j_x/c = -(j/c)(y/a) = -\rho_0(y/a)$. Мы ввели обозначение

$$\rho_0 = \frac{j}{c} = \frac{ni}{bc}. \qquad (49.2)$$

Аналогично, составляющая A_y совпадает с потенциалом заряда, распределенного в поверхностном слое с плотностью $\rho_y = j_y/c = \rho_0(x/a)$.

Плотность, изменяющуюся по закону $-y/a$, можно получить следующим образом. Вставим один в другой два цилиндра, один из которых заряжен равномерно с объемной плотностью $+\rho_0$, а другой — с плотностью $-\rho_0$. В целом система двух цилиндров будет в каждой точке нейтральной. Теперь сместим отрицательно заряженный цилиндр на отрезок $b/2$ в направлении

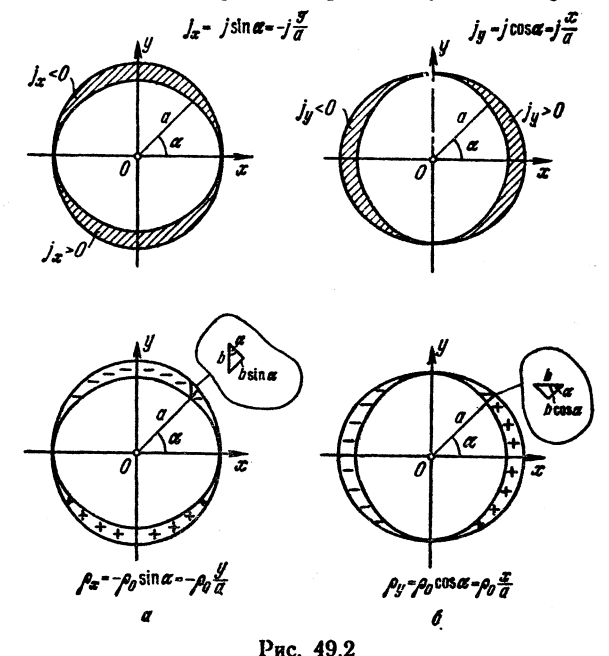


Рис. 49.2

оси y, а положительно заряженный цилиндр на такое же расстояние в противоположную сторону (рис. 49.2, a). Поскольку $b \ll a$ (a радиус цилиндров), образовавшуюся систему можно рассматривать как цилиндр, в поверхностном слое которого толщины b распределен заряд с переменной плотностью ρ_x. В действительности плотность заряда в поверхностном слое постоянна и равна ρ_0 (или $-\rho_0$), изменяется же толщина некомпенсированного слоя. Как видно из рис. 49.2, a, эта толщина меняется по закону $b\sin\alpha$, так что заряд, приходящийся на единицу поверхности цилиндра, равен $-\rho_0 b\sin\alpha = -\rho_0 by/a$. Однако мы не сделаем заметной ошибки, если будем считать

толщину заряженного слоя всюду одинаковой и равной b, а плотность заряда в этом слое изменяющейся по закону

$$\rho_x = -\rho_0 y/a. \quad (49.3)$$

Чтобы получить плотность, изменяющуюся по закону x/a, сдвинем цилиндры, как показано на рис. 49.2, *б*. В этом случае плотность заряда в воображаемом поверхностном слое толщины b изменяется по закону

$$\rho_y = \rho_0 x/a. \quad (49.4)$$

В рассматриваемых случаях поля представляют собой суперпозицию двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку полей $+\varphi_0$ и $-\varphi_0$, сдвинутых друг относительно друга на очень малый отрезок $\mathbf{b}$ (в случае ρ_x вектор $\mathbf{b}$ направлен противоположно оси y, в случае ρ_y — по оси x). Пусть первоначально поля точно накладывались друг на друга, вследствие чего потенциал в точке, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r}$, был равен $(+\varphi_0(\mathbf{r}))+(-\varphi_0(\mathbf{r}))$, т. е. нулю. Теперь сдвинем поле $+\varphi_0$ на $\mathbf{b}/2$, а поле $-\varphi_0$ на $-\mathbf{b}/2$. Тогда в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ будет тот потенциал $+\varphi_0$, который был в точке $(\mathbf{r}-\mathbf{b}/2)$, и потенциал $-\varphi_0$, который был в точке $(\mathbf{r}+\mathbf{b}/2)$. Таким образом,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}-\mathbf{b}/2) - \varphi_0(\mathbf{r}+\mathbf{b}/2).$$

Ввиду малости $\mathbf{b}$ оба члена полученного нами выражения можно преобразовать по формуле (XI. 5), т. е. написать

$$\varphi(\mathbf{r}) = (\varphi_0(\mathbf{r}) - \nabla\varphi_0\cdot\mathbf{b}/2) - (\varphi_0(\mathbf{r}) + \nabla\varphi_0\cdot\mathbf{b}/2) =$$
$$= \nabla\varphi_0\cdot\mathbf{b} = -\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}b_x + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}b_y + \frac{\partial\varphi_0}{\partial z}b_z\right).$$

В случае ρ_x вектор $\mathbf{b}$ имеет компоненты: $b_x = b_z = 0$, $b_y = -b$, так что

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}b \quad \text{для} \quad A_x, \quad (49.5)$$

в случае ρ_y: $b_y = b_z = 0$, $b_x = b$, так что

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}b \quad \text{для} \quad A_y. \quad (49.6)$$

Теперь осталось найти φ_0 и подставить в (49.5) и (49.6) его производные. Напомним, что φ_0 — это потенциал поля, создаваемого цилиндром радиуса a, заряженным с постоянной объемной плотностью $+\rho_0$. Потенциал внутри и вне такого цилиндра определяется разными формулами.

Поле внутри соленоида. С помощью теоремы Гаусса легко найти, что поле внутри заряженного цилиндра равно $E = 2\pi\rho_0 R$, где R — расстояние от оси цилиндра $(R < a)$. Этому полю отвечает потенциал $\varphi_0 = -\pi\rho_0 R^2 + \text{const} = -\pi\rho_0(x^2 + y^2) + \text{const}$. Его производные:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} = -2\pi\rho_0 x, \quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} = -2\pi\rho_0 y.$$

Подставим найденные значения производных в (49.5) и (49.6):

$$\varphi(\mathbf{r}) = -2\pi\rho_0 by \quad \text{для} \quad A_x,$$
$$\varphi(\mathbf{r}) = 2\pi\rho_0 bx \quad \text{для} \quad A_y.$$

Заменив в этих выражениях ρ_0 через ni/bc (см. (49.2)), получим выражения для A_x и A_y (выше было установлено, что $A_z = 0$):

$$A_x = -\frac{2\pi ni}{c}y = -\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi ni}{c}\right)y,$$
$$A_y = \frac{2\pi ni}{c}x = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi ni}{c}\right)x, \tag{49.7}$$
$$A_z = 0.$$

В § 47 было показано (см. (47.11)), что потенциал (49.7) определяет однородное магнитное поле с магнитной индукцией

$$B = (4\pi/c)\,ni, \tag{49.8}$$

параллельной оси z, т. е. оси соленоида.

Поле вне соленоида. Потенциал вне цилиндра, заряженного с плотностью ρ_0, равен

$$\varphi_0 = -2\rho_0\pi a^2 \ln(R/R_0),$$

где R — расстояние от оси цилиндра $(R > a)$, R_0 — константа (ср. с (48.8)). Производные φ_0 имеют вид

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} = -2\rho_0\pi a^2\frac{x}{R^2}, \quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} = -2\rho_0\pi a^2\frac{y}{R^2}.$$

Подстановка этих значений в (49.5) и (49.6) дает

$$\varphi(\mathbf{r}) = -2\rho_0\pi a^2 b \frac{y}{R^2} \quad \text{для} \quad A_x,$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = 2\rho_0\pi a^2 b \frac{x}{R^2} \quad \text{для} \quad A_y.$$

Заменив ρ_0 через ni/bc, получим A_x и A_y. Напишем значения всех трех компонент:

$$A_x = -\frac{2\pi n i a^2}{c}\frac{y}{R^2} = -K\frac{y}{R^2},$$
$$A_y = \frac{2\pi n i a^2}{c}\frac{x}{R^2} = K\frac{x}{R^2}, \qquad (49.9)$$
$$A_z = 0.$$

Величина $R^2 = x^2 + y^2$ не содержит z. Следовательно, $\partial A_x/\partial z = \partial A_y/\partial z = 0$. Из $A_z = 0$ вытекает, что $\partial A_z/\partial x = \partial A_z/\partial y = 0$. Таким образом, B_x и B_y равны нулю. Найдем B_z:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = K\left[\left(\frac{1}{R^2} - \frac{2x}{R^3}\frac{x}{R}\right) - \left(-\frac{1}{R^2} + \frac{2y}{R^3}\frac{y}{R}\right)\right] = K\left[\frac{2}{R^2} - \frac{2}{R^2}\frac{x^2+y^2}{R^2}\right] = 0.$$

Итак, мы получили, что поле вне бесконечно длинного соленоида равно нулю. Векторный же потенциал вне соленоида отличен от нуля. Совокупность формул (49.9) может быть представлена в виде одной векторной формулы:

$$\mathbf{A} = \frac{2\pi n i a^2}{cR^2}[\mathbf{e}_z \mathbf{R}]. \qquad (49.10)$$

Сравнение с формулой (48.11) показывает, что поле вектора **A** вне соленоида имеет такой же характер, как поле вектора **B** вокруг прямого длинного провода с током.

§ 50. Закон Био — Савара

Выражение

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \qquad (50.1)$$

позволяет, зная распределение токов в пространстве, определить векторный потенциал магнитного поля

(см. (48.7)). Попытаемся найти формулу, которая позволяла бы по заданным токам найти сразу **B**. Для этого вычислим ротор функции (50.1). Необходимо иметь в виду, что интегрирование в (50.1) осуществляется по штрихованным координатам x', y', z', дифференцирование же при взятии ротора производится по нештрихованным координатам x, y, z. Поэтому операции интегрирования и взятия ротора можно менять местами. Приняв это во внимание, получим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \frac{1}{c}\int\left[\nabla, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]dV'.$$

Рассматривая $\mathbf{j}(\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ как произведение векторной функции $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ и скалярной функции $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, воспользуемся формулой (XI. 27):

$$\left[\nabla, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] = \left[\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \mathbf{j}(\mathbf{r}')\right] + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}[\nabla, \mathbf{j}(\mathbf{r}')].$$

Второе слагаемое равно нулю, так как $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ не содержит нештрихованных координат. Градиент, фигурирующий в первом слагаемом, равен

$$\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \nabla\frac{1}{\sqrt{\sum(x_i - x_i')^2}} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}.$$

Таким образом, мы приходим к формуле

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\left[-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \mathbf{j}(\mathbf{r}')\right]dV' = \frac{1}{c}\int\frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}-\mathbf{r}']\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \qquad (50.2)$$

(мы вынесли скалярный множитель за знак векторного произведения и, кроме того, поменяли местами сомножители, вследствие чего исчез знак минус).

Полученная формула решает поставленную нами задачу — позволяет по заданным токам вычислить **B**. Формула (50.2) упрощается, если токи текут только по тонким проводам. На рис. 50.1 изображен участок такого провода. Из рисунка видно, что выражение $\mathbf{j}\,dV'$ можно представить в виде

$$\mathbf{j}\,dV' = \mathbf{j}\sigma\,dl = j\sigma\,d\mathbf{l} = i\,d\mathbf{l}, \qquad (50.3)$$

где σ — поперечное сечение провода, i — сила тока, $d\mathbf{l}$ — вектор, совпадающий с элементом провода dl и

направленный в ту сторону, куда течет ток. Заменив в (50.2) $\mathbf{j}dV'$ через $i d\mathbf{l}$, получим

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\int \frac{i\,[d\mathbf{l},\ \mathbf{r}-\mathbf{r}']}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \qquad (50.4)$$

(интегрирование производится по длине всех проводов).

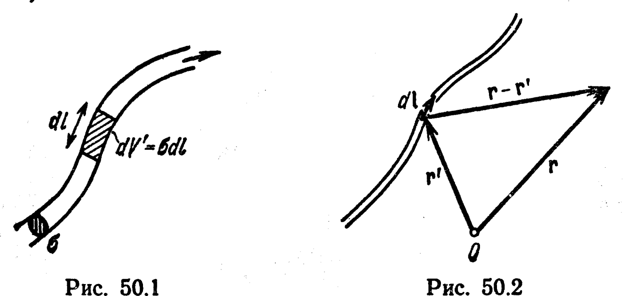


Рис. 50.1 Рис. 50.2

Формула (50.4) является аналитическим выражением закона Био — Савара. Рис. 50.2 поясняет, что $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ представляет собой вектор, проведенный из точки, в которой расположен элемент тока $d\mathbf{l}$, в точку, для которой вычисляется $\mathbf{B}$.

§ 51. Магнитный момент

Прежде чем обратиться к теме данного параграфа, получим так называемое уравнение непрерывности, которое является следствием закона сохранения заряда.

Пусть в некоторой области текут токи, характеризуемые плотностью $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Выделим в этой области воображаемый объем V, ограниченный поверхностью f. Заряд, вытекающий через эту поверхность наружу в единицу времени, можно представить в виде

$$\oint_f j_n\, df = \int_V \nabla\mathbf{j}\, dV.$$

Написанное выражение равно скорости убывания заряда, заключенного в объеме V, которая определяется выражением

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV$$

(мы написали частную производную по t, поскольку ρ есть функция не только времени, но и координат).

Приравняв оба выражения, получим

$$\int_V \nabla \mathbf{j}\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV.$$

Написанное нами соотношение должно выполняться для любого произвольно выбранного объема. Это возможно лишь при равенстве подынтегральных выражений в каждой точке пространства. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad (51.1)$$

которое называется *уравнением непрерывности* в дифференциальной форме. В интегральной форме уравнение непрерывности имеет вид

$$\oint_f j_n\, df = -\frac{d}{dt}\int \rho\, dV. \qquad (51.2)$$

Теперь рассмотрим систему стационарных токов, циркулирующих в пределах ограниченного объема V, и вычислим магнитное поле, создаваемое этой системой на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы. Эта задача аналогична задаче, рассмотренной в § 43.

Прежде всего отметим, что в силу стационарности токов ни в одной из точек системы не может происходить накапливания или рассасывания зарядов, т. е. должно быть всюду $\partial \rho / \partial t = 0$. Отсюда согласно (51.1) вытекает, что в пределах системы

$$\nabla \mathbf{j} = 0. \qquad (51.3)$$

Далее, за пределами системы токов нет. Отсюда следует, что всюду на поверхности, ограничивающей систему,

$$j_n = 0 \qquad (51.4)$$

(токи не пересекают поверхность).

Наконец, докажем, что

$$\int_V \mathbf{j}\, dV = 0, \qquad (51.5)$$

где интеграл берется по всему объему системы. В силу стационарности и ограниченности системы все трубки токов[1]), которые можно выделить внутри системы, будут замкнутыми. Значит, весь объем системы можно разбить на замкнутые трубки токов. Для каждой из трубок интеграл по ее объему можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_{\text{по трубке}} \mathbf{j}\,dV = \int \mathbf{j}\sigma\,dl = \oint i\,d\mathbf{l} = i\oint d\mathbf{l} = 0 \qquad (51.6)$$

(σ — поперечное сечение трубки, i — сила тока, $d\mathbf{l}$ — элемент длины трубки; см. формулу (50.3)). Просуммировав выражение (51.6) по всем трубкам тока, получим формулу (51.5).

Выберем начало координат внутри системы и напишем выражение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (51.7)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, для которой вычисляется $\mathbf{A}$, $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор точки, в окрестности которой расположен элементарный объем dV'; интегрирование производится по штрихованным координатам в пределах объема системы.

Воспользовавшись тем, что по предположению $r' \ll r$, разложим выражение (51.7) в ряд по степеням отношения r'/r[2]). С точностью до членов первого порядка

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{r} - \frac{1}{c}\int\limits_V \mathbf{j}(\mathbf{r}')\left\{\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{r}'\right\}dV'. \qquad (51.8)$$

Первый член этого выражения в силу (51.6) равен нулю. Следовательно, подставив значение $\nabla(1/r)$, получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}\mathbf{r}')\,dV'}{r^3}.$$

---

[1]) Под трубкой электрического тока понимается то же, что и под трубкой тока в жидкости, т. е. объем, ограниченный линиями, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\mathbf{j}$.

[2]) Рассматривая $-\mathbf{r}'$ как малое приращение радиуса-вектора $\mathbf{r}$, мы представляем функцию $f(\mathbf{r}) = 1/r$ для значения аргумента $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ в виде

$$f(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r})(-\mathbf{r}').$$

Напишем k-ю компоненту потенциала:

$$A_k = \frac{1}{cr^3}\int j_k(\mathbf{r}')\left(\sum_i x_i x_i'\right)dV' = \frac{1}{cr^3}\sum_i x_i \int j_k x_i'\,dV' \tag{51.9}$$

(мы выразили скалярное произведение $\mathbf{rr}'$ через компоненты радиусов-векторов). Произведения $j_k x_i'$ суть компоненты тензора второго ранга [1]). Представим этот тензор в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$j_k x_i' = \frac{j_k x_i' + j_i x_k'}{2} + \frac{j_k x_i' - j_i x_k'}{2} = S_{ki} + A_{ki} \tag{51.10}$$

(см. (X.27)).

Докажем, что интеграл от симметричной составляющей тензора (51.10) равен нулю. Для этого воспользуемся тождеством

$$\nabla'(x_i' x_k' \mathbf{j}) \equiv \mathbf{j}\nabla'(x_i' x_k') + x_i' x_k' \nabla' \mathbf{j} \tag{51.11}$$

(см. (XI.26)). В силу (51.3) второй член правой части есть нуль. Запишем выражение $\nabla'(x_i' x_k')$, используя формулу для градиента произведения скалярных функций (см. (XI.25)):

$$\nabla'(x_i' x_k') = x_i'\nabla' x_k' + x_k'\nabla' x_i' =$$

$$= x_i' \sum_m \mathbf{e}_m \frac{\partial x_k'}{\partial x_m'} + x_k' \sum_m \mathbf{e}_m \frac{\partial x_i'}{\partial x_m'} = \sum_m \mathbf{e}_m (x_i'\delta_{km} + x_k'\delta_{im})$$

(мы учли, что $\partial x_k'/\partial x_m' = \delta_{km}$). Выражение в скобках есть m-я компонента градиента функции $x_i' x_k'$.

Теперь вычислим второй член выражения (51.11):

$$\mathbf{j}\nabla'(x_i' x_k') = \sum_m j_m \{\nabla'(x_i' x_k')\}_m = \sum_m j_m (x_i'\delta_{km} + x_k'\delta_{im}) =$$

$$= \sum_m j_m x_i' \delta_{km} + \sum_m j_m x_k' \delta_{im}.$$

---

[1]) Интеграл $I_{ki} = \int j_k x_i'\,dV'$ также представляет собой компоненту тензора. Следовательно, вектор **A** с точностью до множителя $1/cr^3$ является произведением тензора I_{ki} на вектор x_i (см. (X.22)).

В первой сумме отлично от нуля лишь слагаемое с $m=k$, а во второй — слагаемое с $m=i$. Следовательно,

$$\mathbf{j}\nabla'(x_i'x_k') = j_k x_i' + j_i x_k'.$$

Итак, согласно (51.11)

$$S_{ki} = \frac{j_k x_i' + j_i x_k'}{2} = \frac{1}{2}\nabla'(x_i'x_k'\mathbf{j}).$$

Возьмем интеграл от этого выражения

$$\int_V S_{ki}\,dV' = \frac{1}{2}\int_V \nabla'(x_i'x_k'\mathbf{j})\,dV' = \frac{1}{2}\oint_f x_i'x_k'j_n\,df$$

(мы применили теорему Остроградского — Гаусса). В силу (51.4) последний интеграл равен нулю. Таким образом, мы доказали, что интеграл от симметричной составляющей подынтегральной функции в (51.9) есть нуль. С учетом этого обстоятельства выражение (51.9) можно записать так:

$$A_k = \frac{1}{cr^3}\sum_i x_i \int_V \frac{j_k x_i' - j_i x_k'}{2}\,dV' =$$
$$= \frac{1}{2cr^3}\int_V \left\{\sum_i x_i\left(j_k x_i' - j_i x_k'\right)\right\} dV'. \qquad (51.12)$$

Покажем, что подынтегральная функция равна k-й компоненте двойного векторного произведения $[\mathbf{r}[\mathbf{j}\mathbf{r}']]$. Введя вспомогательное обозначение $\mathbf{b}=[\mathbf{j}\mathbf{r}']$ и использовав формулу (VI. 33), можно написать

$$[\mathbf{r}[\mathbf{j}\mathbf{r}']]_k = [\mathbf{r}\mathbf{b}]_k = \sum_{i,l}\varepsilon_{kil}x_i b_l =$$
$$= \sum_{i,l}\varepsilon_{kil}x_i\sum_{m,n}\varepsilon_{lmn}j_m x_n' = \sum_{i,l,m,n}\varepsilon_{kil}\varepsilon_{mnl}x_i j_m x_n'$$

(напомним, что при циклической перестановке индексов значение ε_{lmn} не изменяется). Произведем суммирование по индексу l, причем воспользуемся соотношением (VI. 16)

$$[\mathbf{r}[\mathbf{j}\mathbf{r}']]_k = \sum_{i,m,n}\delta_{km}\delta_{in}x_i j_m x_n' - \sum_{i,m,n}\delta_{kn}\delta_{im}x_i j_m x_n'.$$

Теперь произведем суммирование по индексам m и n. В первой сумме отличными от нуля будут сла-

гаемые с $m=k$ и $n=i$, во второй сумме — слагаемые с $n=k$ и $m=i$. Следовательно,

$$[\mathbf{r}\,[\mathbf{j}\mathbf{r}']]_k=\sum_i x_i j_k x'_i-\sum_i x_i j_i x'_k=\sum_i x_i\left(j_k x'_i-j_i x'_k\right).$$

Сравнение с (51.12) позволяет написать

$$A_k=\frac{1}{2cr^3}\int_V [\mathbf{r}\,[\mathbf{j}\mathbf{r}']]_k\,dV'$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2cr^3}\int_V [[\mathbf{r}'\mathbf{j}]\,\mathbf{r}]\,dV'=\frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2c}\int_V [\mathbf{r}'\mathbf{j}]\,dV',\ \mathbf{r}\right] \qquad (51.13)$$

(мы поменяли местами сомножители в обоих векторных произведениях).

Величину

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2c}\int_V [\mathbf{r}'\mathbf{j}]\,dV \qquad (51.14)$$

называют *магнитным моментом системы*[1]).

Для системы дискретных зарядов выражение магнитного момента имеет вид

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2c}\sum_a e_a\,[\mathbf{r}'_a\mathbf{v}_a]. \qquad (51.15)$$

Это выражение получается из (51.14), если положить

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')=\rho(\mathbf{r}')\,\mathbf{v}(\mathbf{r}')=\sum_a e_a\mathbf{v}(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'_a)$$

(см. (41.12)) и учесть, что $\int e_a\mathbf{v}(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'_a)\,dV'$, взятый в малой окрестности точки $\mathbf{r}'_a$, превращается в $e_a\mathbf{v}_a$.

Магнитный момент зависит только от свойств системы и, как легко убедиться, не зависит от выбора системы координат. Действительно, сместим начало

---

[1]) Мы опустили штрих при dV, так как подынтегральное выражение не содержит нештрихованных координат. В выражениях, содержавших и $\mathbf{r}'$, и $\mathbf{r}$, штрих при dV указывал на то, что интегрирование осуществляется по штрихованным координатам. В дальнейшем в этом выражении мы будем опускать штрих и при $\mathbf{r}$.

системы координат на отрезок $\mathbf{b}$. Тогда радиусы-векторы в новой системе будут равны $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{b}$. Магнитный момент в новой системе имеет вид

$$\mathbf{m}' = \frac{1}{2c}\int_V [\mathbf{r}''\mathbf{j}]\,dV = \frac{1}{2c}\int_V [\mathbf{r}' - \mathbf{b},\ \mathbf{j}]\,dV = \\ = \frac{1}{2c}\int_V [\mathbf{r}'\mathbf{j}]\,dV - \frac{1}{2c}\int_V [\mathbf{b}\mathbf{j}]\,dV.$$

Первый член равен $\mathbf{m}$, второй член можно представить в виде

$$-\frac{1}{2c}\left[\mathbf{b}\int \mathbf{j}\,dV\right].$$

Но согласно (51.5) $\int \mathbf{j}\,dV$ равен нулю. Следовательно, мы пришли к равенству моментов $\mathbf{m}'$ и $\mathbf{m}$, что и требовалось доказать.

С учетом (51.14) выражение (51.13) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{m}\mathbf{r}]}{r^3} = -\left[\mathbf{m},\ \nabla\frac{1}{r}\right] \tag{51.16}$$

(ср. с формулой (43.7)).

Чтобы найти $\mathbf{B}$, нужно вычислить ротор выражения (51.16). Положив в формуле (IX. 29) $\mathbf{a} = \mathbf{m}$, а $\mathbf{b} = \mathbf{r}/r^3$, получим

$$\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}] = \left[\nabla\left[\mathbf{m}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right]\right] = \\ = \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\nabla\right)\mathbf{m} - (\mathbf{m}\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{m}\left(\nabla\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) - \frac{\mathbf{r}}{r^3}(\nabla\mathbf{m}).$$

Вектор $\mathbf{m}$ не зависит от $\mathbf{r}$, поэтому первый и последний члены равны нулю. Согласно (XI. 26)

$$\nabla\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{r}\nabla\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\nabla\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(-\frac{3}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \frac{1}{r^3}3 = 0.$$

Поэтому и третий член равен нулю. Таким образом,

$$\mathbf{B} = -(\mathbf{m}\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{51.17}$$

В соответствии с формулой (XI. 33)

$$(\mathbf{m}\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\mathbf{r}\left(\mathbf{m}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}\right)+\frac{1}{r^3}(\mathbf{m}\nabla)\mathbf{r}=$$

$$=-\mathbf{r}\left(\mathbf{m}\cdot\frac{3}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r}\right)+\frac{1}{r^3}\mathbf{m}=\frac{\mathbf{m}-3\mathbf{e}_r(\mathbf{m}\mathbf{e}_r)}{r^3}$$

(см. (XI. 34), $\mathbf{e}_r$ — орт вектора $\mathbf{r}$). Следовательно,

$$\mathbf{B}=\frac{3\mathbf{e}_r(\mathbf{m}\mathbf{e}_r)-\mathbf{m}}{r^3}. \qquad (51.18)$$

Сравнение с формулой (43.10) показывает, что магнитное поле выражается через магнитный момент такой же формулой, какой электрическое поле выражается через электрический дипольный момент.

В заключение вычислим магнитный момент тока, текущего по тонкому проводу, образующему плоскую петлю. Начало координат выберем в плоскости петли (рис. 51.1). Согласно определению (51.14)

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2c}\int\limits_V[\mathbf{r}\mathbf{j}]\,dV.$$

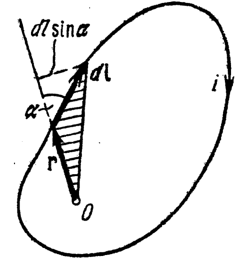


Рис. 51.1

В рассматриваемом случае можно произвести замену: $\mathbf{j}dV=i\,d\mathbf{l}$ (см. формулы (50.3) и (51.6)). Следовательно, выражению для $\mathbf{m}$ можно придать вид

$$\mathbf{m}=\frac{i}{2c}\oint[\mathbf{r},\,d\mathbf{l}].$$

Обозначив орт нормали к плоскости петли буквой $\mathbf{n}$ (на рис. 51.1 этот орт направлен за чертеж), подынтегральное выражение можно записать как $\mathbf{n}r\sin\alpha\,dl$, так что

$$\mathbf{m}=\frac{i\mathbf{n}}{c}\oint\frac{r\sin\alpha\,dl}{2}.$$

Из рис. 51.1 видно, что подынтегральное выражение равно площади заштрихованного треугольника. Поэтому интеграл равен площади петли f. Таким

образом, мы пришли к выражению для магнитного момента:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} i f \mathbf{n}.$$

§ 52. Поле в магнетиках

При наличии магнетиков на поле токов проводимости $\mathbf{B}_j$ накладывается поле, создаваемое молекулами, $\mathbf{B}_{\text{мол}}$, так что результирующее микроскопическое поле можно представить в виде

$$\mathbf{B}_{\text{рез}} = \mathbf{B}_j + \mathbf{B}_{\text{мол}}. \qquad (52.1)$$

Поле $\mathbf{B}_{\text{рез}}$, подобно определяемому формулой (44.1) полю $\mathbf{E}_{\text{рез}}$, является быстропеременной функцией времени. Кроме того, оно сильно меняется в пространстве между двумя соседними молекулами. Поэтому в качестве характеристики магнитного поля в магнетиках берут макроскопическую величину

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_j + \langle \mathbf{B}_{\text{мол}} \rangle, \qquad (52.2)$$

которую называют *магнитной индукцией* в магнетике. Усреднение микроскопического поля $\mathbf{B}_{\text{мол}}$ производится таким же способом, как и усреднение поля $\mathbf{E}_{\text{связ}}$ (см. § 44).

Состояние магнетика принято характеризовать магнитным моментом единицы объема магнетика, который называют *намагниченностью*. Мы будем обозначать ее символом $\mathbf{M}$. Очевидно, что $\mathbf{M}$ можно определить как

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{dV}, \qquad (52.3)$$

где dV — физически бесконечно малый объем, $\mathbf{m}_i$ — магнитный момент отдельной молекулы; суммирование осуществляется по всем молекулам, заключенным в объеме dV.

Вклад, вносимый магнетиком в макроскопическое магнитное поле, можно вычислить по формуле (51.16). Согласно (52.3) элемент объема магнетика dV' обладает магнитным моментом $d\mathbf{m} = \mathbf{M}\,dV'$. Следовательно, в точке, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r}$, этот элемент объема создает магнитный потенциал

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{M}(\mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dV' \qquad (52.4)$$

($\mathbf{r}'$ — радиус-вектор точки, в которой расположен элемент объема dV', $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ — намагниченность в этой точке).

Интеграл от выражения (52.4), взятый по всему объему магнетика, даст вклад, вносимый магнетиком в макроскопический магнитный потенциал. Его нужно прибавить к магнитному потенциалу, обусловленному токами проводимости (см. формулу (48.7)). Следовательно, поле при наличии магнетика, будет характеризоваться потенциалом

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int \frac{[\mathbf{M}(\mathbf{r}'),\ \mathbf{r}-\mathbf{r}']}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' = I_1 + I_2. \tag{52.5}$$

Второй интеграл в этом выражении можно преобразовать следующим образом:

$$I_2 = \int \frac{[\mathbf{M}(\mathbf{r}'),\ \mathbf{r}-\mathbf{r}']}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' = \int \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}'),\ \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] dV' = \int \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}'),\ \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] dV'$$

(штрих при ∇ означает, что при взятии градиента дифференцирование осуществляется по штрихованным координатам).

Положив в формуле (XI.27) $\varphi = 1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ и $\mathbf{a} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')$, получим, что

$$\left[\nabla,\ \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] = \left[\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\ \mathbf{M}(\mathbf{r}')\right] + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}[\nabla',\ \mathbf{M}(\mathbf{r}')],$$

откуда

$$\left[\mathbf{M}(\mathbf{r}'),\ \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] = \frac{[\nabla',\ \mathbf{M}(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \left[\nabla',\ \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right].$$

Следовательно, второе слагаемое в формуле (52.5) можно представить в виде

$$I_2 = \int \frac{[\nabla',\ \mathbf{M}(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' - \int \left[\nabla',\ \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] dV' = I_2' + I_2''.$$

Преобразуем интеграл I_2'' по формуле (XI.60):

$$I_2'' = \int_V \left[\nabla',\ \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] dV' = \int_f \left[d\mathbf{f}',\ \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right].$$

Если магнетик занимает конечный объем или $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ достаточно быстро убывает при удалении от начала

координат, последний интеграл равен нулю (в случае локализации магнетика в конечном объеме поверхность интегрирования можно выбрать вне магнетика и тогда всюду на поверхности $\mathbf{M}(\mathbf{r}')=0$).

Таким образом, при наличии магнетиков векторный потенциал определяется выражением

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=I_1+I_2'=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\int\frac{[\nabla',\ \mathbf{M}(\mathbf{r}')]\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=$$

$$=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')+c\,[\nabla',\ \mathbf{M}(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'. \qquad (52.6)$$

Полученный нами результат можно истолковать так, что намагниченность вносит в векторный потенциал такой же вклад, как и ток плотности

$$\mathbf{j}_M=c\,[\nabla\mathbf{M}] \qquad (52.7)$$

(мы опустили штрих при ∇, соответственно $\mathbf{M}$ рассматривается как функция не $\mathbf{r}'$, а $\mathbf{r}$). Отсюда вытекает, что при наличии магнетиков уравнение (48.3) нужно писать в виде

$$[\nabla\mathbf{B}]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}+4\pi\,[\nabla\mathbf{M}]. \qquad (52.8)$$

Объединив члены, содержащие ротор, получим

$$[\nabla,\ \mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Величина

$$\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M} \qquad (52.9)$$

называется *напряженностью магнитного поля.* Она представляет собой вспомогательную макроскопическую характеристику магнитного поля, аналогичную электрической индукции $\mathbf{D}$ (см. (45.2)). Для $\mathbf{H}$ имеет место уравнение

$$[\nabla\mathbf{H}]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \qquad (52.10)$$

Опыт дает, что для так называемых диа- и парамагнетиков намагниченность пропорциональна напряженности поля:

$$\mathbf{M}=\chi\mathbf{H}. \qquad (52.11)$$

(Предполагается, что магнетик изотропный. Кроме того, имеются в виду поля, при которых намагничение далеко от насыщения.)

Величина χ называется *магнитной восприимчивостью* вещества. Для парамагнетиков χ положительна, для диамагнетиков — отрицательна. Подстановка выражения (52.11) в формулу (52.9) дает, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\chi\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}, \tag{52.12}$$

где

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \tag{52.13}$$

есть *магнитная проницаемость* вещества.

Соотношения (52.11) — (52.13) распространяют и на ферромагнетики, рассматривая χ и μ как функции напряженности поля $\mathbf{H}$.

Целесообразность введения $\mathbf{H}$ обусловлена теми же соображениями, какие были изложены в § 45 для обоснования целесообразности введения $\mathbf{D}$.

Рассмотрим поле в однородном изотропном магнетике. Предположим, что в отсутствие магнетика данные токи проводимости возбуждают поле, характеризуемое индукцией $\mathbf{B}_0$ и потенциалом $\mathbf{A}_0$. Известно, что $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{A}_0$ являются решениями уравнений

$$[\nabla\mathbf{B}_0] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{52.14}$$

$$\Delta\mathbf{A}_0 = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{52.15}$$

(см. (48.3) и (48.4)).

Теперь, не изменяя токов проводимости, заполним все пространство, в котором поле отлично от нуля, однородным ($\mu = \mathrm{const}$) изотропным магнетиком. Тогда индукция поля станет равной $\mathbf{B}$, а потенциал примет значение $\mathbf{A}$. Напишем уравнения для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$. Согласно равенству (52.10)

$$[\nabla\mathbf{H}] = \left[\nabla\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{52.16}$$

Заменив в этом уравнении $\mathbf{B}$ через $[\nabla\mathbf{A}]$ (см. (47.5)) и приняв во внимание, что $\mu = \mathrm{const}$, можно написать

$$\frac{1}{\mu}[\nabla[\nabla\mathbf{A}]] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Развернем левую часть полученного выражения по формуле (XI. 45). В результате получим

$$\frac{1}{\mu}\{\nabla(\nabla\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}\} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Однако мы условились выбирать **A** так, чтобы $\nabla\mathbf{A}$ равнялась нулю (см. (47.7)). Следовательно, первый член в фигурных скобках равен нулю и мы приходим к уравнению

$$\Delta\frac{\mathbf{A}}{\mu} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{52.17}$$

Сравнение (52.16) с (52.14) и (52.17) с (52.15) показывает, что уравнение для $\mathbf{B}/\mu$ совпадает с уравнением для $\mathbf{B}_0$, а уравнение для $\mathbf{A}/\mu$ — с уравнением для $\mathbf{A}_0$. Отсюда следует, что заполнение пространства, в котором имеется поле, однородным магнетиком приводит к увеличению как магнитной индукции, так и магнитного потенциала в μ раз.

Согласно равенству (52.17) уравнение Пуассона (48.4) для поля в однородном изотропном магнетике будет иметь следующий вид:

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}. \tag{52.18}$$

В случае, когда однородный изотропный магнетик с $\mu = \text{const}$ (т. е. с μ, не зависящей от **H**) заполняет все пространство, в котором поле отлично от нуля, справедливо соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}[\nabla\mathbf{A}] = [\nabla\mathbf{A}'], \tag{52.19}$$

где $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\mu$.

Подчеркнем, что напряженность поля **H** можно представить в виде ротора функции $\mathbf{A}/\mu$ только в том случае, когда магнетик однороден и $\mu = \text{const}$. Магнитную же индукцию **B** можно представить в виде $\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}]$ всегда, поскольку при любых условиях $\nabla\mathbf{B} = 0$.

Напомним, что на границе двух магнетиков векторы **B** и **H** должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} B_{n1} &= B_{n2}, \quad B_{\tau1}/\mu_1 = B_{\tau2}/\mu_2, \\ H_{\tau1} &= H_{\tau2}, \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}. \end{aligned} \tag{52.20}$$

Вывод этих граничных условий можно найти в учебниках общей физики.

В анизотропных магнетиках связь между **M** и **H** дается соотношениями

$$M_i = \sum_{k=1}^{3} \chi_{ik} H_k \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{52.21}$$

где χ_{ik} — симметричный тензор второго ранга, называемый тензором магнитной восприимчивости.

Соответственно уравнения, связывающие векторы **B** и **H**, выглядят следующим образом:

$$B_i = \sum_{k=1}^{3} \mu_{ik} H_k \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{52.22}$$

где величины

$$\mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik} \tag{52.23}$$

суть компоненты тензора магнитной проницаемости (ср. с формулами § 46).

Глава X

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 53. Закон электромагнитной индукции

При изменении потока магнитной индукции через замкнутый контур Г в этом контуре возникает ЭДС индукции, равная

$$\mathscr{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_f \mathbf{B}\,d\mathbf{f}$$

(Ф — магнитный поток, пронизывающий контур). Если поверхность, по которой берется интеграл, не изменяется со временем, операции дифференцирования по t и интегрирования по координатам можно поменять местами. Поэтому выражению для $\mathscr{E}_i$ можно придать вид

$$\mathscr{E}_i = -\frac{1}{c}\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{f} \qquad (53.1)$$

(мы написали частную производную по t, потому что **B**, вообще говоря, есть функция и времени, и координат).

ЭДС по определению есть циркуляция по данному контуру вектора напряженности поля сторонних сил $\mathbf{E}_{\text{ст}}$. В данном случае напряженностью $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ является напряженность **E** вихревого электрического поля, возбуждаемого изменяющимся магнитным полем **B**. Следовательно,

$$\mathscr{E}_i = \oint\limits_\Gamma E_l\,dl = \int\limits_f [\nabla\mathbf{E}]\,d\mathbf{f} \qquad (53.2)$$

(мы применили теорему Стокса).

Приравняв правые части выражений (53.1) и (53.2), придем к соотношению

$$\int [\nabla\mathbf{E}]\,d\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\int\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{f}. \qquad (53.3)$$

Допустим, что оба интеграла берутся по одной и той же поверхности (равенство (53.3) выполняется и для разных поверхностей, лишь бы эти поверхности опирались на один и тот же контур Г). Соотношение (53.3) должно выполняться для любой поверхности f. Это возможно лишь в том случае, если подынтегральные функции имеют одинаковое значение в каждой точке пространства. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$[\nabla\mathbf{E}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{53.4}$$

В полученное нами уравнение не входят параметры контура, с рассмотрения которого мы начали этот параграф. Естественно предположить, что это уравнение должно выполняться для любой точки поля, независимо от присутствия в этом поле физически выделенного (в частности, проводящего) контура. Как известно, это предположение оправдывается на опыте.

Из уравнения (53.4) следует, что изменяющееся во времени магнитное поле **B** должно порождать электрическое поле **E**. Действительно, для того чтобы $[\nabla\mathbf{E}]$ был отличен от нуля, необходимо наличие неоднородного (т. е. меняющегося от точки к точке) поля **E**.

§ 54. Ток смещения

Анализируя уравнения, описывающие электромагнитные явления, Максвелл обратил внимание на то, что в нестационарном случае уравнение

$$[\nabla\mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{54.1}$$

(см. (52.10)) несовместимо при $\partial\rho/\partial t \neq 0$ с уравнением непрерывности

$$\nabla\mathbf{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{54.2}$$

(см. (51.1)). Чтобы убедиться в этом, возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (54.1). Поскольку дивергенция ротора всегда равна нулю (см. (XI.44)), мы придем к выводу, что дивергенция **j**, а следовательно, и $\partial\rho/\partial t$ не могут быть отличными от нуля. Однако заключение о том, что $\partial\rho/\partial t$ всегда равно нулю,

не согласуется с опытом: при нестационарных процессах плотность зарядов сплошь и рядом изменяется с течением времени.

Уравнения (54.1) и (54.2) можно согласовать, добавив в (54.1) к $\mathbf{j}$ некоторую величину (обозначим ее $\mathbf{j}_{\text{смещ}}$), имеющую размерность плотности тока. Эту величину нужно определить так, чтобы всегда соблюдалось условие

$$\nabla(\mathbf{j}+\mathbf{j}_{\text{смещ}})=0.$$

Из него с учетом (54.2) следует, что слагаемое $\mathbf{j}_{\text{смещ}}$ должно удовлетворять соотношению

$$\nabla\mathbf{j}_{\text{смещ}}=-\nabla\mathbf{j}=\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{54.3}$$

Продифференцировав по времени уравнение (45.3), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\mathbf{D})=4\pi\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

или, переставив порядок дифференцирования $\mathbf{D}$ по времени и координатам,

$$\nabla\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)=4\pi\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Подставив получающееся из этого соотношения выражение для $\partial\rho/\partial t$ в формулу (54.3), придем к равенству

$$\nabla\mathbf{j}_{\text{смещ}}=\frac{1}{4\pi}\nabla\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right).$$

Из этого равенства следует, что в качестве $\mathbf{j}_{\text{смещ}}$ должно быть взято выражение

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{54.4}$$

(в общем случае нужно добавить к правой части произвольную функцию времени $f(t)$, но мы положим ее равной нулю).

Таким образом, Максвелл пришел к выводу, что в случае нестационарного поля уравнение (54.1) следует писать в виде

$$[\nabla\mathbf{H}]=\frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)$$

или

$$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (54.5)$$

Величину $\mathbf{j}_{смещ}$ Максвелл назвал *током смещения*, а сумму $\mathbf{j} + \mathbf{j}_{смещ}$ — *полным током*.

Из уравнения (54.5) следует, что магнитное поле может порождаться не только токами проводимости, но также и меняющимся со временем электрическим полем. Таким образом, введение тока смещения сделало поля **E** и **B** равноправными в отношении способности порождать друг друга.

§ 55. Уравнения Максвелла

Совокупность уравнений (45.3), (47.4), (53.4) и (54.5) образует систему уравнений Максвелла. Эти уравнения принято группировать попарно, причем уравнения

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (55.1)$$

и

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \qquad (55.2)$$

называют первой парой уравнений Максвелла, а уравнения

$$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (55.3)$$

и

$$\nabla \mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad (55.4)$$

носят название второй пары уравнений. Заметим, что в первую пару уравнений входят только основные характеристики поля: **E** и **B**. Во второй же паре фигурируют вспомогательные величины **D** и **H**.

Уравнения Максвелла составляют основу всей электродинамики. Они играют в классической электродинамике такую же роль, какую в классической механике играют законы Ньютона.

Система уравнений Максвелла включает в себя 8 скалярных уравнений (каждое из векторных уравнений (55.1) и (55.3) эквивалентно 3 скалярным), в которых содержится 12 неизвестных скалярных функций (компонент векторов **E**, **B**, **D** и **H**). Поэтому сами по себе уравнения (55.1)—(55.4) недостаточны для

определения электромагнитных полей в веществе. В этом смысле система уравнений Максвелла является неполной. Для того чтобы можно было произвести вычисление полей, уравнения Максвелла нужно дополнить уравнениями, связывающими друг с другом величины $\mathbf{D}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, а также $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$. Эти уравнения [1]) имеют вид (см. (45.5) и (52.12))

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{55.5}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{55.6}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \tag{55.7}$$

(σ — электропроводность среды). Для решения задачи должны быть известны характеристики среды: ε, μ и σ, которые в простейшем случае являются константами.

Отметим, что уравнения Максвелла можно написать так, чтобы в них не входили вспомогательные величины $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$. Для этого нужно во второй паре уравнений заменить эти величины их значениями (45.2) и (52.9). Предоставляем читателю убедиться в том, что после такой замены уравнения Максвелла приобретают вид

$$[\nabla\mathbf{E}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla\mathbf{B} = 0; \tag{55.8}$$

$$[\nabla\mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j} + c[\nabla\mathbf{M}] + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},$$
$$\nabla\mathbf{E} = 4\pi(\rho - \nabla\mathbf{P}). \tag{55.9}$$

Для того чтобы решить систему уравнений (55.8), (55.9), нужно знать вид функций $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$ и $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E})$.

В дальнейшем нам придется рассматривать электромагнитные поля в однородных и изотропных средах, проницаемости которых ε и μ постоянны. В этом случае проницаемости можно выносить из-под знаков производных либо, наоборот, вносить их под знак производных. Поэтому уравнениям (55.1)—(55.4) можно придать вид

$$[\nabla\mathbf{E}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\mathbf{B} = 0; \tag{55.10}$$

$$[\nabla\mathbf{B}] = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \nabla\mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho. \tag{55.11}$$

[1]) Их называют иногда уравнениями состояния.

В отсутствие поляризующихся и намагничивающихся сред ε и μ равны единице, так что уравнения Максвелла для поля в вакууме выглядят следующим образом:

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \mathbf{B} = 0; \qquad (55.12)$$

$$[\nabla \mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \nabla \mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (55.13)$$

Поскольку в гауссовой системе для поля в вакууме **H** совпадает с **B**, в уравнениях (55.12) и (55.13) можно в этом случае писать **H** вместо **B**.

§ 56. Потенциалы электромагнитного поля

В § 47, воспользовавшись тем, что $\nabla \mathbf{B} = 0$, мы представили магнитную индукцию в виде

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}], \qquad (56.1)$$

где **A** — вспомогательная функция, называемая *векторным потенциалом*. Выражение (56.1) остается в силе и для нестационарного поля. Однако в этом случае **A** следует считать функцией не только координат, но и времени: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

Подставим (56.1) в уравнение (55.1). В результате получим

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \mathbf{A}] = -\frac{1}{c}\left[\nabla \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right].$$

Это соотношение можно записать так:

$$\left[\nabla, \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right] = 0.$$

Поскольку ротор вектора $\mathbf{E} + (1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$ оказывается равным нулю, этот вектор можно представить в виде градиента некоторой функции φ:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi. \qquad (56.2)$$

Функция φ называется *скалярным потенциалом* электромагнитного поля. В нестационарном случае она зависит от **r** и от t. Из (56.2) следует, что потенциалы φ и **A** имеют одинаковую размерность.

Согласно (56.2)

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \qquad (56.3)$$

Таким образом, напряженность электрического поля в общем случае определяется не только скалярным потенциалом φ, но и векторным потенциалом $\mathbf{A}$. Второе слагаемое в (56.3), очевидно, обусловлено явлением электромагнитной индукции. В случае стационарного поля $\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$ и формула (56.3) переходит в (41.5).

Соотношения (56.1) и (56.3) выражают магнитное и электрическое поля через векторный и скалярный потенциалы.

Найдем уравнения, с помощью которых можно вычислить потенциалы $\mathbf{A}$ и φ для поля в однородной и изотропной среде с постоянными ε и μ. С этой целью заменим в уравнениях (55.11) $\mathbf{E}$ выражением (56.3), а $\mathbf{B}$ ротором $\mathbf{A}$:

$$[\nabla[\nabla\mathbf{A}]] = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},$$

$$\nabla(\nabla\varphi) + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho.$$

Приняв во внимание, что $[\nabla[\nabla\mathbf{A}]] = \nabla(\nabla\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$ (см. (XI.45)), а $\nabla(\nabla\varphi) = \Delta\varphi$, запишем полученные нами уравнения в следующем виде:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \nabla\left(\nabla\mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \qquad (56.4)$$

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\mathbf{A}) \qquad (56.5)$$

(в некоторых членах уравнений мы поменяли порядок дифференцирования по координатам и времени).

Уравнения (56.4) и (56.5) и суть искомые уравнения для нахождения $\mathbf{A}$ и φ. Эти уравнения довольно сложны. Особенно неприятно то, что они взаимосвязаны — в каждое из них входит и $\mathbf{A}$, и φ. Однако, как мы увидим ниже, потенциалы можно выбрать так, чтобы эти уравнения сильно упростились.

Потенциалы $\mathbf{A}$ и φ определяются неоднозначно. Поэтому имеется некоторая свобода в их выборе. В частности, например, к $\mathbf{A}$ можно прибавить произвольный постоянный вектор, а к φ — произвольную

постоянную без того, чтобы изменились значения **B** и **E**. Разумеется, выбор потенциалов следует осуществлять наиболее удобным для данного случая образом. Такой наиболее целесообразный подбор потенциалов называется их *калибровкой*. Заметим, что мы уже пользовались возможностью калибровки потенциалов в магнитостатике: в § 47 мы выбирали **A** так, чтобы его дивергенция была равна нулю (см. формулу (47.7)).

Определим самый общий вид калибровочных преобразований, т. е. таких преобразований потенциалов **A** и φ, при которых поля **E** и **B** остаются неизменными. Поле $\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}]$ не изменится, если к **A** добавить градиент произвольной скалярной функции f (ротор градиента равен нулю), т. е. перейти от **A** к **A**′, равному $\mathbf{A} + \nabla f$:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f. \tag{56.6}$$

Для того чтобы при этом не изменилось электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - (1/c)\,\partial\mathbf{A}/\partial t$, одновременно с переходом (56.6) нужно совершить переход

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{56.7}$$

где f — та же функция, что и в (56.6). Действительно, поле **E**′, определяемое потенциалами **A**′ и φ', будет в этом случае равно

$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} =$$

$$= -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla f = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}$$

(напомним, что $\nabla(\partial f/\partial t) = \partial(\nabla f)/\partial t$)). Таким образом, преобразование потенциалов по формулам (56.6) и (56.7) не изменяет значений **B** и **E**.

Преобразования (56.6) и (56.7) представляют собой калибровочные преобразования наиболее общего вида. Поскольку при осуществлении этих преобразований поля **B** и **E** остаются неизменными, все уравнения, описывающие эти поля, должны быть инвариантными по отношению к калибровочным преобразованиям. Эта инвариантность называется *калибровочной* (или *градиентной*) *инвариантностью*.

На практике, как уже отмечалось, применяется калибровка, наиболее целесообразная в каждом конкретном случае. В частности, можно выбрать потенциалы так, чтобы выполнялось условие

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \qquad (56.8)$$

называемое *условием Лоренца*.

Для поля в вакууме условие Лоренца имеет вид

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \qquad (56.9)$$

Покажем, что условие (56.8) может быть удовлетворено надлежащим выбором функции f в формулах (56.6) и (56.7). Для этого подставим в уравнение (56.8) значения $\mathbf{A}'$ и φ', определяемые этими формулами:

$$\nabla \mathbf{A} + \Delta f + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

($\nabla(\nabla f) = \Delta f$). Отсюда получается уравнение для нахождения функции f:

$$\Delta f - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = F(\mathbf{r}, t), \qquad (56.10)$$

где $F(\mathbf{r}, t) = -\nabla \mathbf{A} - (\varepsilon\mu/c)\partial\varphi/\partial t$ есть заданная функция $\mathbf{r}$ и t. Подставив функцию f, получающуюся из решения этого уравнения, в формулы (56.6) и (56.7), мы найдем значения потенциалов $\mathbf{A}'$ и φ', удовлетворяющие условию (56.8).

Калибровка потенциалов, удовлетворяющая условию (56.8), называется *лоренцевой калибровкой*. Этот вид калибровки является наиболее употребительным.

Условие Лоренца сильно ограничивает набор значений потенциалов, пригодных для описания данного поля, но все же не делает выбор потенциалов вполне однозначным. Действительно, не нарушая условия (56.8), можно осуществлять преобразования

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi,$$
$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad (56.11)$$

(оба набора потенциалов — **A**, φ и **A**$'$, φ' — предполагаются удовлетворяющими условию Лоренца), где функция ψ является решением уравнения

$$\Delta\psi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \qquad (56.12)$$

Действительно, подставив в левую часть (56.8) вместо **A** и φ штрихованные потенциалы из (56.11), получим выражение

$$\nabla\mathbf{A} + \Delta\psi + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(\nabla\mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \left(\Delta\psi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right),$$

которое в силу (56.8) и (56.12) равно нулю. Таким образом, если потенциалы **A** и φ принадлежат к лоренцевой калибровке, то и определяемые преобразованиями (56.11) (с ψ, подчиняющейся (56.12)) потенциалы **A**$'$ и φ' принадлежат к той же калибровке. Это обстоятельство позволяет наложить на потенциалы, кроме условия (56.8), еще одно дополнительное условие. Например, можно потребовать, чтобы потенциал φ был равен нулю. Для этого согласно второму из уравнений (56.11) достаточно выбрать функцию ψ так, чтобы ее производная по времени была равна $c\varphi$.

В качестве дополнительного условия может быть также принято требование

$$\nabla\mathbf{A} = 0. \qquad (56.13)$$

Из (56.11) следует, что $\nabla\mathbf{A}' = \nabla\mathbf{A} + \Delta\psi$. Поэтому для того чтобы выполнялось требование $\nabla\mathbf{A}' = 0$, необходимо соблюдение равенства

$$\Delta\psi = -\nabla\mathbf{A}.$$

Вместе с тем из (56.12)

$$\Delta\psi = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Поэтому, если взять в качестве ψ решение уравнения

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\nabla\mathbf{A}$$

и подставить это ре ение в (56.11), мы получим значения **A**$'$ и φ', удовлетворяющие и условию Лоренца, и требованию (56.13).

Лоренцева калибровка, удовлетворяющая дополнительному условию (56.13), называется *кулоновской* (или поперечной) *калибровкой*. В гл. IX мы пользовались именно этой калибровкой (см. (47.7)). Из (56.5) следует, что при кулоновской калибровке скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

(см. уравнение (45.13)), т. е. является кулоновским потенциалом. Отсюда и происходит название «кулоновская калибровка».

§ 57. Уравнение Даламбера

При соблюдении условия (56.8) последний член в уравнении (56.4) обращается в нуль. Кроме того, производная по времени от $\nabla\mathbf{A}$ имеет значение $-(\varepsilon\mu/c)\partial^2\varphi/\partial t^2$. Следовательно, уравнения (56.4) и (56.5) приобретают вид

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}, \qquad (57.1)$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \qquad (57.2)$$

Таким образом, вместо двух взаимосвязанных уравнений мы получили два раздельных уравнения, причем уравнения для $\mathbf{A}$ и φ приобрели сходную форму.

Дифференциальное уравнение вида

$$\Delta f - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = F(\mathbf{r}, t) \qquad (57.3)$$

называется *уравнением Даламбера* (ср. с (56.10)). Его можно записать в очень компактной форме, если ввести так называемый *оператор Даламбера*:

$$\Box = \Delta - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \qquad (57.4)$$

Тогда уравнение (57.3) выглядит следующим образом:

$$\Box f = F(\mathbf{r}, t). \qquad (57.5)$$

В стационарном случае производные по времени обращаются в нуль и уравнение Даламбера перехо-

дит в уравнение Пуассона (см. уравнения (45.13) и (52.18)).

С использованием символа (57.4) уравнения (57.1) и (57.2) приобретают вид

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j},$$

$$\square \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

С математической точки зрения уравнения (57.6) и (57.7) проще, чем уравнения Максвелла. Поэтому легче бывает вычислить потенциалы **A** и φ, чем непосредственно поля **B** и **E**. Если же потенциалы известны, нахождение полей по формулам (56.1) и (56.3) не составляет большого труда. Это обстоятельство служит оправданием введения вспомогательных величин **A** и φ. Кроме того, как мы увидим в следующей главе, введение потенциалов позволяет придать уравнениям электродинамики очень компактную и изящную форму.

§ 58. Плотность и поток энергии электромагнитного поля

Из опыта следует, что электромагнитное поле обладает энергией, которая распределяется в пространстве с некоторой плотностью w и может перетекать из одного места в другое. Кроме того, эта энергия может превращаться в другие виды энергии, например, затрачиваться на совершение работы над частицами вещества.

Выделим в веществе, в котором имеется макроскопическое электромагнитное поле, объем V, ограниченный поверхностью f. В этом объеме сосредоточена энергия поля, равная

$$W = \int\limits_V w\,dV. \qquad (58.1)$$

Энергия может вытекать наружу из объема V через ограничивающую его поверхность f. Если ввести вектор плотности потока энергии **S**, то поток энергии, вытекающий наружу через f, можно представить

следующим образом:

$$\Phi = \int_f S_n \, df = \int_V \nabla \mathbf{S} \, dV \tag{58.2}$$

(мы воспользовались теоремой Остроградского — Гаусса).

Найдем работу, совершаемую в единицу времени силами поля над частицами вещества. Над частицей, имеющей заряд e_a и движущейся со скоростью $\mathbf{v}_a$, силы поля совершают в единицу времени работу:

$$N_a = e_a \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_a \mathbf{B}] \right\} \mathbf{v}_a = e_a \mathbf{v}_a \mathbf{E}$$

(смешанное произведение $\mathbf{v}_a [\mathbf{v}_a \mathbf{B}]$ равно нулю). Просуммировав это выражение по всем частицам, заключенным в единице объема, получим плотность мощности, развиваемой силами электромагнитного поля при совершении работы над частицами вещества. Обозначив плотность мощности буквой N, можно написать

$$N = \sum N_a = \mathbf{E} \sum_{V=1} e_a \mathbf{v}_a.$$

Взятая по единице объема сумма $\sum e_a \mathbf{v}_a$ есть плотность электрического тока $\mathbf{j}$ (если все частицы одинаковы, движутся с одинаковой скоростью и число их в единице объема равно n, то $\sum e_a \mathbf{v}_a$ превращается в известное выражение: $\mathbf{j} = en\mathbf{v}$). Таким образом,

$$N = \mathbf{E}\mathbf{j}. \tag{58.3}$$

Заключенная в объеме V энергия W может уменьшаться за счет вытекания энергии наружу через поверхность f и за счет совершения работы над частицами вещества. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\frac{dW}{dt} = -\Phi - \int_V N \, dV$$

(напомним, что N есть плотность мощности, т. е. мощность, развиваемая в единице объема). Подставив выражения (58.1)—(58.3) для W, Φ и N, получим

$$\frac{d}{dt} \int_V w \, dV = -\int_V \nabla \mathbf{S} \, dV - \int_V \mathbf{E}\mathbf{j} \, dV.$$

Поменяем местами в первом интеграле дифференцирование по времени и интегрирование по координатам, а также объединим все три интеграла в один. В результате получим

$$\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \mathbf{S} + \mathbf{E}\mathbf{j}\right) dV = 0 \qquad (58.4)$$

(мы применили символ частной производной, потому что w в общем случае является функцией не только времени, но и координат).

Условие (58.4) должно выполняться для любого произвольно выбранного объема V. Отсюда заключаем, что подынтегральная функция должна быть равна нулю в каждой точке. Следовательно, мы приходим к дифференциальному уравнению, которое можно написать в виде

$$\mathbf{E}\mathbf{j} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \mathbf{S}. \qquad (58.5)$$

Плотность энергии w и плотность потока энергии $\mathbf{S}$ являются функциями величин, характеризующих поле. Чтобы найти вид этих функций, попытаемся преобразовать выражение $\mathbf{E}\mathbf{j}$ так, чтобы оно стало суммой двух слагаемых, одно из которых было бы производной по времени от некоторой скалярной величины, которую мы сможем отождествить с w, а второе — дивергенцией от некоторой векторной величины, которую мы отождествим с $\mathbf{S}$.

Воспользовавшись уравнением Максвелла (55.3), выразим $\mathbf{j}$ через характеристики поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}[\nabla \mathbf{H}] - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Теперь умножим скалярно это выражение на $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}[\nabla \mathbf{H}] - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (58.6)$$

Согласно формуле (XI. 28) $\nabla[\mathbf{E}\mathbf{H}] = \mathbf{H}[\nabla \mathbf{E}] - \mathbf{E}[\nabla \mathbf{H}]$, откуда $\mathbf{E}[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{H}[\nabla \mathbf{E}] - \nabla[\mathbf{E}\mathbf{H}]$. Подставив это значение в (58.6), получим

$$\mathbf{E}\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi}\nabla[\mathbf{E}\mathbf{H}] + \left\{\frac{c}{4\pi}\mathbf{H}[\nabla \mathbf{E}] - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right\}. \qquad (58.6')$$

Воспользовавшись уравнением Максвелла (55.1), заменим $[\nabla \mathbf{E}]$ на $-(1/c)\partial \mathbf{B}/\partial t$. В результате выражение

в фигурных скобках примет вид

$$\{\ldots\} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right\}.$$

Наконец, используем соотношения (55.5) и (55.6):

$$\{\ldots\} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\mathbf{H}\frac{\partial (\mu\mathbf{H})}{\partial t} + \mathbf{E}\frac{\partial (\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t}\right\} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi}\right)$$

(мы предположили, что ε и μ не зависят от времени).

Итак, формулу (58.7) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{Ej} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}\right) - \nabla\left\{\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]\right\}.$$

Сопоставление полученного соотношения с формулой (58.5) дает для w и $\mathbf{S}$ выражения

$$w = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}, \quad (58.8)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]. \quad (58.9)$$

Определяемый формулой (58.9) вектор $\mathbf{S}$ называется *вектором Пойнтинга.*

Отметим, что выражение (58.8) включает в себя как собственно энергию поля, равную

$$w_0 = \frac{E^2 + H^2}{8\pi},$$

так и энергию, затраченную на поляризацию и намагничивание среды.

§ 59. Импульс электромагнитного поля

Из существования давления света вытекает, что электромагнитное поле обладает не только энергией, но и импульсом. Импульс, как и энергия, может «перетекать» из одного места в другое. Этот процесс можно охарактеризовать, введя понятия *потока* и *плотности потока импульса.*

Поток импульса, в отличие от потока энергии, является не скаляром, а вектором. Следовательно, плотность потока импульса должна быть величиной такой природы, чтобы при умножении на вектор $d\mathbf{f}$

(df — элемент поверхности) давать вектор. В приложении X показано, что скалярное произведение тензора второго ранга на вектор представляет собой вектор. Отсюда заключаем, что плотность потока импульса есть тензор. Обозначим компоненты этого тензора символом σ_{ik}. Тогда поток i-й компоненты импульса через площадку $d\mathbf{f}$ будет определяться выражением

$$\sum_k \sigma_{ik}\, df_k,$$

а поток вектора импульса — формулой

$$\sum_i \mathbf{e}_i \sum_k \sigma_{ik}\, df_k.$$

В системе, состоящей из свободных заряженных частиц и электромагнитного поля, должен сохраняться суммарный импульс, слагающийся из импульса частиц и импульса поля. Следовательно, обозначив суммарный импульс частиц символом $\mathbf{P}$, а плотность импульса (т. е. импульс единицы объема) электромагнитного поля символом $\mathbf{g}$, можно написать

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{P} + \int_V \mathbf{g}\, dV\right) = \sum_i \mathbf{e}_i \oint_f \sum_k \sigma_{ik}\, df_k.$$

Левая часть дает скорость возрастания суммарного импульса, содержащегося в объеме V, правая часть — поток импульса поля, втекающий в объем V через ограничивающую его поверхность f. Предполагаем, что частицы не пересекают эту поверхность, так что переноса через нее импульса частицами не происходит.

Представим написанное нами соотношение в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = -\int_V \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}\, dV + \sum_i \mathbf{e}_i \oint_f \sum_k \sigma_{ik}\, df_k. \qquad (59.1)$$

Скорость изменения импульса частицы определяется силой, действующей на частицу:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vB}].$$

Просуммировав это выражение по частицам, заключенным в единице объема, получим, что

$$\frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{jB}],$$

где $\mathbf{p}_0$ — плотность импульса частиц. Наконец, проинтегрировав это соотношение по всему объему системы, найдем скорость изменения суммарного импульса частиц:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \int\limits_V \rho\mathbf{E}\,dV + \frac{1}{c}\int\limits_V [\mathbf{jB}]\,dV. \tag{59.2}$$

Исключим из этого выражения ρ и $\mathbf{j}$ с помощью уравнений Максвелла. Среду, в которой находятся частицы и поле, будем предполагать однородной и изотропной с постоянными ε и μ. Из уравнений (55.11) следует, что

$$\rho = \frac{\varepsilon}{4\pi}\nabla\mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi\mu}[\nabla\mathbf{B}] - \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Подстановка этих значений в (59.2) дает

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int \mathbf{E}\nabla\mathbf{E}\,dV + \frac{1}{4\pi\mu}\int [[\nabla\mathbf{B}]\,\mathbf{B}]\,dV - \frac{\varepsilon}{4\pi c}\int\left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{B}\right]dV. \tag{59.3}$$

Преобразуем полученную формулу, воспользовавшись соотношением

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EB}] = \left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{B}\right] + \left[\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right],$$

откуда

$$\left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{B}\right] = \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EB}] - \left[\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right].$$

Заменим здесь $\partial\mathbf{B}/\partial t$ через $-c[\nabla\mathbf{E}]$ согласно первому из уравнений (55.10). В итог получи

$$\left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{B}\right] = \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EB}] + c[\mathbf{E}[\nabla\mathbf{E}]].$$

Подставив полученное значение в (59.3), придем к соотношению

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int \mathbf{E}\nabla\mathbf{E}\,dV + \frac{1}{4\pi\mu}\int [[\nabla\mathbf{B}]\,\mathbf{B}]\,dV - \frac{\varepsilon}{4\pi c}\int \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EB}]\,dV - \frac{\varepsilon}{4\pi}\int [\mathbf{E}[\nabla\mathbf{E}]]\,dV.$$

Произведем во втором и третьем интегралах замену: $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, кроме того, во втором интеграле поменяем

местами сомножители (при этом знак изменится на обратный):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int \mathbf{E}\nabla\mathbf{E}\,dV - \frac{\mu}{4\pi}\int [\mathbf{H}[\nabla\mathbf{H}]]\,dV - \\ - \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\int \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}\mathbf{H}]\,dV - \frac{\varepsilon}{4\pi}\int [\mathbf{E}[\nabla\mathbf{E}]]\,dV.$$

Чтобы сделать это выражение симметричным по **E** и **H**, добавим к его правой части слагаемое $(\mu/4\pi)\int \mathbf{H}\nabla\mathbf{H}\,dV$. От этого выражение не изменится, так как это слагаемое равно нулю ($\mu\nabla\mathbf{H} = \nabla(\mu\mathbf{H}) = \nabla\mathbf{B}$ всюду есть нуль). Наконец, сгруппировав надлежащим образом члены, получим

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = -\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\int \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}\mathbf{H}]\,dV + \\ + \frac{1}{4\pi}\int \{\varepsilon\mathbf{E}\nabla\mathbf{E} + \mu\mathbf{H}\nabla\mathbf{H} - \varepsilon[\mathbf{E}[\nabla\mathbf{E}]] - \mu[\mathbf{H}[\nabla\mathbf{H}]]\}\,dV. \quad (59.4)$$

Второй интеграл, как мы убедимся ниже, можно преобразовать в интеграл по поверхности f, ограничивающей объем V. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = -\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}[\mathbf{E}\mathbf{H}]\right\}dV + \\ + \text{интеграл по поверхности } f. \quad (59.5)$$

Из сравнения найденного соотношения с (59.1) следует вывод, что плотность импульса электромагнитного поля определяется выражением

$$\mathbf{g} = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}[\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (59.6)$$

Приняв во внимание (58.9), можно написать, что

$$\mathbf{g} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\mathbf{S}, \quad (59.7)$$

где **S** — вектор Пойнтинга. В вакууме это соотношение имеет вид

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}. \quad (59.8)$$

Отметим, что выражение (59.7) кроме собственно импульса поля включает в себя импульс связанных зарядов, входящих в состав среды, в которой создано поле. Чтобы получить импульс одного только поля, следует в формуле (59.1) под **P** подразумевать механический импульс не только свободных, но также и связанных зарядов. Тогда в качестве **E** и **B** нужно было бы взять не усредненное макроскопическое поле, а микроскопическое поле и соответственно пользоваться при преобразованиях уравнениями Максвелла для поля в вакууме[1]). Это равнозначно тому, чтобы положить во всех формулах данного параграфа $\varepsilon = \mu = 1$. В результате мы пришли бы к формуле (59.8). Таким образом, плотность импульса одного только поля во всех случаях (и в вакууме, и в веществе) определяется формулой (59.8). Сопоставление этой формулы с формулой (40.36) показывает, что между плотностями потоков энергии и импульса электромагнитного поля существует точно такая же связь, какая была получена в § 40 для произвольной системы.

Теперь рассмотрим второй интеграл в формуле (59.4), т. е. интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\int \{\varepsilon \mathbf{E}\nabla\mathbf{E} + \mu\mathbf{H}\nabla\mathbf{H} - \varepsilon[\mathbf{E}[\nabla\mathbf{E}]] - \mu[\mathbf{H}[\nabla\mathbf{H}]]\}dV. \quad (59.9)$$

Попытаемся преобразовать его в поверхностный интеграл.

Подынтегральная функция содержит два аналогичных выражения вида

$$\mathbf{a}\nabla\mathbf{a} - [\mathbf{a}[\nabla\mathbf{a}]].$$

В одном из них вместо **a** стоит **E**, в другом — **H**.

Положив в формуле

$$\nabla(\mathbf{ab}) = [\mathbf{a}[\nabla\mathbf{b}]] + [\mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}]] + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}$$

(см. (XI.37)) $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, получим

$$\nabla a^2 = 2[\mathbf{a}[\nabla\mathbf{a}]] + 2(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{a}. \quad (59.10)$$

Найдем значение выражения $(\nabla\mathbf{a})\mathbf{b}$, в котором предполагается, что ∇ действует на оба стоящие после

---

[1]) Мы не сделали этого с самого начала, чтобы получить более общее выражение для максвелловского тензора натяжений (см. ниже), пригодное также и для поля в среде.

него сомножителя. По общему правилу вычисления таких выражений имеем

$$(\nabla\mathbf{a})\,\mathbf{b} = (\nabla_a\mathbf{a})\,\mathbf{b} + (\nabla_b\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\nabla\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b}$$

или, положив $\mathbf{b} = \mathbf{a}$,

$$(\nabla\mathbf{a})\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\nabla\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{a}.$$

Выразив из последнего соотношения $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{a}$, подставим его в формулу (59.10):

$$\nabla a^2 = 2\,[\mathbf{a}\,[\nabla\mathbf{a}]] + 2\,(\nabla\mathbf{a})\,\mathbf{a} - 2\mathbf{a}\nabla\mathbf{a}.$$

Отсюда

$$\mathbf{a}\nabla\mathbf{a} - [\mathbf{a}\,[\nabla\mathbf{a}]] = (\nabla\mathbf{a})\,\mathbf{a} - \frac{1}{2}\nabla a^2.$$

Применив такое преобразование к интегралу (59.9), приведем его к виду

$$\frac{1}{4\pi}\int\left\{\varepsilon\,(\nabla\mathbf{E})\,\mathbf{E} + \mu\,(\nabla\mathbf{H})\,\mathbf{H} + \frac{1}{2}\nabla\,(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\right\}dV.$$

В написанном нами интеграле оператор ∇ действует на все стоящие за ним функции. Поэтому мы можем с помощью преобразования

$$dV\cdot\nabla \to d\mathbf{f}$$

(см. (XI.65)) превратить этот интеграл в поверхностный

$$\frac{1}{4\pi}\oint\left\{\varepsilon\mathbf{E}\,(\mathbf{E}\,d\mathbf{f}) + \mu\mathbf{H}\,(\mathbf{H}\,d\mathbf{f}) - \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\,d\mathbf{f}\right\} \tag{59.11}$$

(поскольку $d\mathbf{f}$ не обладает свойствами дифференциального оператора, сомножители в выражениях вида $(d\mathbf{f}\,\mathbf{a})\mathbf{a}$ можно менять местами).

Раскроем выражение (59.11) через компоненты входящих в него векторов. В результате получим

$$\frac{1}{4\pi}\sum_i \mathbf{e}_i \oint\left\{\varepsilon E_i \sum_k E_k\,df_k + \mu H_i \sum_k H_k\,df_k - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\,df_i\right\}.$$

Представим в последнем члене df_i как $\sum\limits_k \delta_{ik}\,df_k$ и вынесем df_k за скобки. Кроме того, заменим выражения

вида εE_i через D_i, а вида μH_i через B_i. В итоге придем к выражению

$$\frac{1}{4\pi}\sum_i \mathbf{e}_i \oint \sum_k \left\{E_i D_k + H_i B_k - \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,\delta_{ik}\right\} df_k,$$

которое совпадет с последним членом формулы (59.1), если положить

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left\{E_i D_k + H_i B_k - \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,\delta_{ik}\right\}. \qquad (59.12)$$

Как было выяснено в начале этого параграфа, тензор σ_{ik} характеризует плотность потока импульса (см. также § 40). Тензор σ_{ik}, компоненты которого определяются формулой (59.12), называют максвелловским тензором натяжений (или напряжений).

Чтобы подчеркнуть симметричность тензора σ_{ik}, его компоненты пишут иногда в виде

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{8\pi}\{E_i D_k + E_k D_i + H_i B_k + H_k B_i - (\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,\delta_{ik}\}.$$

Для поля в вакууме формула (59.12) упрощается следующим образом:

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left\{E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\,\delta_{ik}\right\}. \qquad (59.13)$$

Тензор σ_{ik} позволяет свести задачу о нахождении силы, действующей в электромагнитном поле на некоторый объем вещества, к вычислению поверхностного интеграла

$$\sum_i \mathbf{e}_i \oint_f \sum_k \sigma_{ik}\, df_k.$$

Глава XI

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ФОРМЕ

§ 60. Четырехмерный потенциал[1])

Согласно принципу относительности уравнения электродинамики, равно как и все другие уравнения, выражающие законы природы, должны быть релятивистски-инвариантными, т. е. сохранять свою форму при преобразованиях Лоренца (при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой). Путем непосредственной проверки можно убедиться в том, что уравнения Максвелла удовлетворяют этому требованию. Однако мы выберем другой путь — покажем, что уравнения электродинамики могут быть написаны в четырехмерной форме, в виде соотношений между 4-векторами и 4-тензорами, откуда и будет следовать их релятивистская инвариантность.

Отправным пунктом для нас послужит принимаемое в электродинамике (в соответствии с опытом) положение о том, что электрический заряд представляет собой инвариант, т. е. что величина заряда частицы одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Отсюда следует, что величина ρdV также будет инвариантом:

$$\rho\, dV = \rho\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = \mathrm{inv}. \qquad (60.1)$$

Трехмерный объем dV не является, как мы знаем, инвариантом (см. формулу (35.17)). Следовательно, из (60.1) заключаем, что плотность заряда ρ также не является инвариантной, а преобразуется при переходе от одной системы отсчета к другой по какому-то

---

[1]) В этой главе рассматриваются поля в вакууме, т. е. предполагается, что $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$.

Советуем перед тем, как приступить к чтению этой главы, просмотреть Приложение XII и гл. VII.

закону. Чтобы установить этот закон, примем во внимание, что четырехмерный объем есть инвариант

$$dV^* = dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = c\, dt\, dV = \text{inv}. \qquad (60.2)$$

Действительно, при переходе к другой системе отсчета dt и dV преобразуются по формулам

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dV' = dV \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

так что $dt'\, dV' = dt\, dV$.

Из сопоставления (60.1) с (60.2) следует, что ρ преобразуется по такому же закону, что и dx^0, т. е. как временная компонента некоторого 4-вектора.

В Приложении XII показано, что контравариантные компоненты 4-оператора Гамильтона равны

$$\nabla^{*\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ -\nabla\right)$$

(см. формулу (XII. 45)).

Согласно (XII. 38) символический квадрат вектора ∇^* равен

$$\nabla^{*2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \qquad (60.3)$$

где Δ — трехмерный оператор Лапласа.

Сравнение (60.3) с (57.4) показывает, что оператор Даламбера для поля в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) отличается от ∇^{*2} только знаком:

$$\nabla^{*2} = -\square. \qquad (60.4)$$

Из всего сказанного вытекает, что уравнение (57.7) можно записать в виде

$$\nabla^{*2}\varphi = 4\pi\rho. \qquad (60.5)$$

Выше мы выяснили, что ρ обладает свойствами временной компоненты 4-вектора, ∇^{*2}, как и квадрат любого 4-вектора, ведет себя при преобразованиях Лоренца как инвариант. С учетом этого на основании (60.5) заключаем, что потенциал φ должен преобразовываться по такому же закону, как ρ, т. е. как временная компонента 4-вектора.

Рассмотрим вектор плотности тока $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$. Его компоненты равны:

$$j_k = \rho v_k = \rho \frac{dx^k}{dt} \qquad (k = 1, 2, 3). \qquad (60.6)$$

При преобразованиях ρ ведет себя подобно ct либо $c\,dt$. Следовательно, j_k будут вести себя подобно dx^k $(k = 1, 2, 3)$, т. е. как пространственные компоненты 4-вектора.

Итак, при преобразованиях координат ρ ведет себя как временна́я компонента 4-вектора, а величины j_k — как пространственные компоненты 4-вектора. Поэтому, умножив ρ на скаляр c (чтобы получить величину такой же размерности, какую имеют j_k), можно объединить ρ и $\mathbf{j}$ в один 4-вектор, называемый 4-вектором заряда — тока или просто 4-вектором тока. Его компоненты имеют значения:

$$j^0 = c\rho, \quad j^1 = j_x, \quad j^2 = j_y, \quad j^3 = j_z,$$

что можно записать кратко следующим образом:

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}). \qquad (60.7)$$

Заметим, что компоненту $j^0 = c\rho$ можно представить подобно компонентам (60.6) как

$$j^0 = \rho \frac{dx^0}{dt}$$

$(x^0 = ct)$. Поэтому компоненты 4-вектора тока можно определить следующим образом:

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3). \qquad (60.8)$$

Вытекающее из сохранения заряда уравнение непрерывности имеет вид (см. (51.1))

$$\nabla \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

С учетом (60.7) это уравнение можно записать в четырехмерной форме:

$$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \qquad (60.9)$$

Левая часть последнего соотношения представляет собой четырехмерную дивергенцию 4-вектора тока.

Действительно, по аналогии с трехмерной дивергенцией 4-дивергенцию вектора a^μ нужно определить как скалярное произведение векторов ∇^* и a^μ, т. е. как

$$\sum_{\mu=0}^{3} \nabla^{*\mu} a_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \nabla_\mu^* a^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu}$$

(см. выражение (XII. 42) для ковариантных компонент вектора ∇^*).

Равенство нулю 4-дивергенции вектора j^μ является аналитическим выражением закона сохранения заряда. То обстоятельство, что введенный нами вектор (60.7) удовлетворяет столь простому условию, является еще одним доводом в пользу объединения ρ и $\mathbf{j}$ в один 4-вектор.

Учтя, что $\Box = -\nabla^{*2}$, напишем уравнения (57.6) и (57.7) следующим образом:

$$\nabla^{*2}\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{60.10}$$

$$\nabla^{*2}\varphi = \frac{4\pi}{c}(c\rho). \tag{60.11}$$

Из уравнения (60.10) вытекает, что величины A_k ведут себя так же, как величины j_k, т. е. подобно пространственным компонентам 4-вектора. Это обстоятельство дает возможность объединить φ и $\mathbf{A}$ в один 4-вектор:

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}), \tag{60.12}$$

называемый *4-потенциалом электромагнитного поля.* Тогда уравнения (60.10) и (60.11) можно представить в виде одного уравнения

$$\nabla^{*2}A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{60.13}$$

либо

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \tag{60.14}$$

Ковариантные компоненты 4-потенциала выглядят следующим образом:

$$A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A}). \tag{60.15}$$

Напомним, что 4-потенциал определяется неоднозначно. Согласно (47.6) значения пространственных

компонент A_k могут быть заменены величинами

$$\bar{A}_k = A_k + \frac{\partial \psi (x^1, x^2, x^3)}{\partial x^k}, \tag{60.16}$$

а значение компоненты A_0 — величиной

$$\bar{A}_0 = A_0 + C \tag{60.17}$$

(C — константа; см. текст, следующий за формулой (41.5)) без того, чтобы изменились характеристики поля **B** и **E**.

Лоренцево условие калибровки (см. (56.8)) в четырехмерной форме имеет вид

$$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \tag{60.18}$$

Это означает, что 4-потенциал выбирается так, чтобы его 4-дивергенция равнялась нулю (ср. с (47.7)).

§ 61. Тензор электромагнитного поля

Перейдем от потенциалов к силовым характеристикам поля **E** и **B**. Этот переход осуществляется по формулам (56.1) и (56.3). Для удобства выпишем эти формулы еще раз:

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}], \tag{61.1}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{61.2}$$

Напишем выражения для компонент вектора **E**:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t},$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t},$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

В четырехмерных обозначениях эти формулы можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = \nabla_0^* A_1 - \nabla_1^* A_0, \\ E_y &= \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2} = \nabla_0^* A_2 - \nabla_2^* A_0, \\ E_z &= \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3} = \nabla_0^* A_3 - \nabla_3^* A_0 \end{aligned} \tag{61.3}$$

(см. формулы (XII. 42) для ковариантных компонент 4-оператора градиента и формулы (60.15) для ковариантных компонент 4-потенциала. Согласно последним формулам, например, $A_x = -A_1$ и т. д.).

Теперь напишем выражения для компонент вектора **B**. Согласно (61.1)

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2} = \nabla_3^* A_2 - \nabla_2^* A_3, \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = \nabla_1^* A_3 - \nabla_3^* A_1, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} = \nabla_2^* A_1 - \nabla_1^* A_2. \end{aligned} \qquad (61.4)$$

Из тензорной алгебры известно, что выражения вида $a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu$ суть ковариантные компоненты антисимметричного тензора второго ранга (a_μ и b_ν — ковариантные компоненты произвольных векторов). Из формул (61.3), (61.4) следует, что компоненты векторов **E** и **B** можно трактовать как ковариантные компоненты антисимметричного 4-тензора

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu^* A_\nu - \nabla_\nu^* A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \qquad (61.5)$$

Этот тензор называется *тензором электромагнитного поля.*

Переместив в обеих частях равенства индексы μ и ν, получим выражение для контравариантных компонент тензора электромагнитного поля

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}. \qquad (61.6)$$

Сопоставление формул (61.3) и (61.4) с выражением (61.5) дает, что

$$\begin{aligned} &E_x = F_{01} = -F_{10}, \quad E_y = F_{02} = -F_{20}, \quad E_z = F_{03} = -F_{30}, \\ &B_x = F_{32} = -F_{23}, \quad B_y = F_{13} = -F_{31}, \quad B_z = F_{21} = -F_{12}. \end{aligned} \qquad (61.7)$$

Таким образом, тензор $F_{\mu\nu}$ выглядит следующим образом:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (61.8)$$

Приняв во внимание формулы (XII. 58), напишем значения контравариантных компонент тензора электромагнитного поля

$$(F^{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (61.9)$$

Итак, в четырехмерном пространстве электромагнитное поле описывается не посредством двух векторов (**E** и **B**), а с помощью одного антисимметричного тензора второго ранга.

Отметим, что в то время, как 4-потенциал A^μ определяется неоднозначно, компоненты тензора $F_{\mu\nu}$ оказываются однозначными. Действительно, произведем в (61.5) замену компонент A_μ величинами $\overline{A}_\mu$ согласно формулам (60.16) и (60.17). Если μ и ν равны 1, 2, 3, получим

$$\overline{F}_{\mu\nu}=\frac{\partial\overline{A}_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\overline{A}_\mu}{\partial x^\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}+\frac{\partial^2\psi(x^1,x^2,x^3)}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}-$$
$$-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial^2\psi(x^1,x^2,x^3)}{\partial x^\nu\,\partial x^\mu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}=F_{\mu\nu}.$$

Если один из индексов (например, μ) равен нулю, получим соотношение

$$\overline{F}_{0\nu}=\frac{\partial\overline{A}_\nu}{\partial x^0}-\frac{\partial\overline{A}_0}{\partial x^\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial\psi(x^1,x^2,x^3)}{\partial x^\nu}-$$
$$-\frac{\partial A_0}{\partial x^\nu}-\frac{\partial C}{\partial x^\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^0}-\frac{\partial A_0}{\partial x^\nu}=F_{0\nu}.$$

Таким образом, мы доказали, что величины $F_{\mu\nu}$ определяются однозначно.

§ 62. Формулы преобразования полей

Формулы преобразования компонент антисимметричного 4-тензора выведены в Приложении XII (см. формулы (XII. 62)). Подстановка значений (35.8) и

(35.9) для α_0 и α_1 приводит эти формулы к виду

$$A'^{01}=A^{01},\qquad A'^{02}=\frac{A^{02}-\beta A^{12}}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad A'^{03}=\frac{A^{03}-\beta A^{13}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$A'^{12}=\frac{A^{12}-\beta A^{02}}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad A'^{13}=\frac{A^{13}-\beta A^{03}}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad A'^{23}=A^{23}\qquad(62.1)$$

$(\beta=v_0/c)$.

Написав формулы (62.1) для тензора (61.9), получим

$$F'^{01}=F^{01},\qquad \text{т. е.}\quad E'_x=E_x,$$
$$F'^{02}=\frac{F^{02}-\beta F^{12}}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \text{т. е.}\quad E'_y=\frac{E_y-\beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

и т. д. Выписав соотношения (62.1) для всех компонент тензора $F^{\mu\nu}$ и заменив $F^{\mu\nu}$ соответствующими значениями E_k и B_k, придем к формулам преобразования компонент векторов **E** и **B** при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$E'_x=E_x,\quad E'_y=\frac{E_y-\beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad E'_z=\frac{E_z+\beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$B'_x=B_x,\quad B'_y=\frac{B_y+\beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad B'_z=\frac{B_z-\beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.\qquad(62.2)$$

Формулы обратного преобразования отличаются от этих формул лишь знаком при членах, содержащих множитель β (т. е. знаком при v_0).

Разложив векторы **E** и **B** на составляющие параллельные оси x (а значит, и вектору $\mathbf{v}_0$) и перпендикулярные к этой оси (т. е. представив, например, **E** в виде $\mathbf{E}_\parallel+\mathbf{E}_\perp$), можно записать формулы (62.2) в векторном виде[1])

$$\mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel,\quad \mathbf{E}'_\perp=\frac{\mathbf{E}_\perp+(1/c)\,[\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp]}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}},$$
$$\mathbf{B}'_\parallel=\mathbf{B}_\parallel,\quad \mathbf{B}'_\perp=\frac{\mathbf{B}_\perp-(1/c)\,[\mathbf{v}_0\mathbf{E}_\perp]}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\qquad(62.3)$$

---

[1]) Заметим, что поскольку $\mathbf{B}_\parallel$ и $\mathbf{v}_0$ коллинеарны, $[\mathbf{v}_0\mathbf{B}]=[\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\parallel]+[\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp]=[\mathbf{v}_0\mathbf{B}_\perp]$. Аналогично $[\mathbf{v}_0\mathbf{E}]=[\mathbf{v}_0\mathbf{E}_\perp]$. Поэтому в векторных произведениях формул (62.3) можно опустить индекс «$\perp$» при $\mathbf{B}_\perp$ и $\mathbf{E}_\perp$.

(напомним, что $v_x = v_0$, $v_y = v_z = 0$). Из этих формул видно, что продольные[1]) составляющие полей при переходе от одной системы отсчета к другой не изменяются, а преобразуются только поперечные составляющие.

Если $\beta \ll 1$ (т. е. $v_0 \ll c$), выражение $1/\sqrt{1-\beta^2}$ приближенно равно $1+(1/2)\beta^2$. Следовательно, с точностью до членов порядка $\beta = v_0/c$ формулы (62.2) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &E'_x = E_x, \quad E'_y = E_y - (v_0/c)B_z, \quad E'_z = E_z + (v_0/c)B_y, \\ &B'_x = B_x, \quad B'_y = B_y + (v_0/c)E_z, \quad B'_z = B_z - (v_0/c)E_y. \end{aligned} \qquad (62.4)$$

Легко убедиться в том, что эти формулы могут быть записаны в векторном виде

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_0\,\mathbf{B}], \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}] \qquad (62.5)$$

(ср. с формулами (62.3)).

Если в системе K имеется только электрическое поле (т. е. $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{B} = 0$), то в системе K' будут существовать оба поля. Согласно формулам (62.5) эти поля равны

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}' = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}].$$

Учтя, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$, можно написать, что

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}']. \qquad (62.6)$$

Последнее соотношение[2]) указывает на то, что поля $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{E}'$ взаимно перпендикулярны. Из этого соотношения вытекает также, что поле $\mathbf{B}'$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{v}_0$, т. е. к оси x.

Аналогичным способом можно показать, что в случае, когда в системе K имеется только магнитное поле, векторы $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{E}'$ связаны соотношением

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c}[\mathbf{v}_0\mathbf{B}']. \qquad (62.7)$$

---

[1]) Так мы будем называть для простоты составляющие, параллельные вектору относительной скорости систем K и K' (вектору $\mathbf{v}_0$). Перпендикулярные составляющие мы будем называть поперечными.

[2]) Рекомендуем убедиться в том, что такое же соотношение между векторами $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{E}'$ получается в рассматриваемом случае и из точных формул (62.2).

Следовательно, и в этом случае поля $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{E}'$ взаимно перпендикулярны. Кроме того, $\mathbf{E}'$ перпендикулярно к $\mathbf{v}_0$, т. е. к оси x.

Таким образом, если в системе K существует лишь одно из полей ($\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}$), то в любой другой системе K' поля $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{E}'$ взаимно перпендикулярны. Справедливо и обратное заключение: если в некоторой системе отсчета K поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ взаимно перпендикулярны (и величины полей удовлетворяют условиям, указанным ниже), то существуют такие системы K', в которых поле будет чисто электрическим, а также такие системы, в которых поле будет чисто магнитным. Найдем скорости соответствующих систем, начав с рассмотрения случая, когда $v_0 \ll c$.

Пусть векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ взаимно перпендикулярны. Из формул (62.5) следует, что для того, чтобы в системе K' поле было чисто электрическим (т. е. $\mathbf{B}'$ было равно нулю), вектор $\mathbf{v}_0$ должен удовлетворять условию

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}].$$

Это условие будет соблюдено, если вектор $\mathbf{v}_0$ перпендикулярен к $\mathbf{B}$ ($\mathbf{E}$ перпендикулярно к $\mathbf{B}$ по предположению) и, кроме того, $v_0 E \sin\alpha = cB$, где α — угол между векторами $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{E}$. Таким образом, поле будет чисто электрическим во всех системах, движущихся в направлениях, перпендикулярных к $\mathbf{B}$, при условии, что скорость v_0 данной системы равна $cB/E\sin\alpha$. Поскольку скорость системы v_0 не может превзойти c, рассматриваемые системы отсчета существуют лишь при условии, что $cB < E\sin\alpha$. Если $E \leqslant cB$, указанное условие не выполняется ни при каком угле α. Следовательно, в этом случае, несмотря на взаимную перпендикулярность $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, систем, в которых поле является чисто электрическим, не существует.

Легко убедиться в том, что полученный нами результат справедлив без оговорки, что $v_0 \ll c$. Для этого обратимся к формулам (62.3). Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ взаимно перпендикулярны. Возьмем систему K', скорость $\mathbf{v}_0$ которой перпендикулярна к $\mathbf{B}$ и равна по величине $cB/E\sin\alpha$ (α — угол между векторами $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{E}$). Вследствие взаимной перпендикулярности векторов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{B}$ составляющая $\mathbf{B}_\parallel$ равна нулю. Согласно формулам

(62.3) $\mathbf{B}'_{\parallel}$ также будет нулем. Рассмотрим числитель формулы (62.3) для $\mathbf{B}'_{\perp}$. При выбранном нами направлении $\mathbf{v}_0$ вектор $\mathbf{B}_{\perp}$ равен $\mathbf{B}$. Векторное произведение векторов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{E}$ можно представить в виде

$$[\mathbf{v}_0\mathbf{E}] = [\mathbf{v}_0\mathbf{E}_{\parallel}] + [\mathbf{v}_0\mathbf{E}_{\perp}] = [\mathbf{v}_0\mathbf{E}_{\perp}]$$

(первое слагаемое равно нулю, так как векторы $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{E}_{\parallel}$ коллинеарны). Таким образом, формулу для $\mathbf{B}'_{\perp}$ можно в рассматриваемом случае написать следующим образом:

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B} - (1/c)\,[\mathbf{v}_0\mathbf{E}]}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \qquad (62.8)$$

По условию вектор $\mathbf{B}$ перпендикулярен как к $\mathbf{E}$, так и к $\mathbf{v}_0$. Поэтому вектор $[\mathbf{v}_0\mathbf{E}]$ коллинеарен вектору $\mathbf{B}$. Выбрав надлежащим образом направление вектора $\mathbf{v}_0$ (вправо или влево), можно сделать так, чтобы векторы $[\mathbf{v}_0\mathbf{E}]$ и $\mathbf{B}$ имели одинаковое направление. Тогда в числителе формулы (62.8) будет стоять разность двух одинаково направленных векторов, модули которых равны B и $(1/c)v_0E\sin\alpha$. Если $v_0 = cB/E\sin\alpha$, модули этих векторов окажутся одинаковыми и числитель в формуле для $\mathbf{B}'_{\perp}$ обратится в нуль. Таким образом, и $\mathbf{B}'_{\parallel}$, и $\mathbf{B}'_{\perp}$ в этом случае будут отсутствовать. Аналогично можно показать, что в случае взаимной перпендикулярности полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ в системах K', движущихся в направлениях, перпендикулярных к вектору $\mathbf{E}$, со скоростью v_0, равной $cE/B\sin\alpha$ (α — угол между векторами $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{B}$), поле будет чисто магнитным. Это утверждение справедливо при условии, что $cE < B\sin\alpha$. Если $B \leqslant cE$, систем, в которых поле является чисто магнитным, не существует.

§ 63. Инварианты поля

Образуем выражение

$$\mathbf{B}'^2 - \mathbf{E}'^2 = \sum B'^2_k - \sum E'^2_k = \sum \left(B'^2_k - E'^2_k\right).$$

Заменим в нем величины B'_k и E'_k их выражениями

через нештрихованные компоненты (см. (62.2)):

$$\mathbf{B}'^2 - \mathbf{E}'^2 = \sum \left(B_k'^2 - E_k'^2\right) = B_x^2 - E_x^2 + \\ + \frac{(B_y + \beta E_z)^2 - (E_y - \beta B_z)^2 + (B_z - \beta E_y)^2 - (E_z + \beta B_y)^2}{1 - \beta^2}.$$

Легко убедиться в том, что правая часть приводится к виду

$$\left(B_x^2 - E_x^2\right) + \left(B_y^2 - E_y^2\right) + \left(B_z^2 - E_z^2\right).$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что разность квадратов векторов **B** и **E** имеет одинаковое значение во всех инерциальных системах отсчета, т. е. является инвариантом

$$\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = \mathrm{inv}. \qquad (63.1)$$

Теперь образуем скалярное произведение векторов $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$, т. е. сумму $\sum E_k' B_k'$. Подставим в эту сумму вместо E_k' и B_k' их значения (62.2). В результате получим соотношение

$$\sum E_k' B_k' = \\ = E_x B_x + \frac{(E_y - \beta B_z)(B_y + \beta E_z) + (E_z + \beta B_y)(B_z - \beta E_y)}{1 - \beta^2} = \\ = \sum E_k B_k.$$

Следовательно, скалярное произведение векторов **E** и **B** также является инвариантом

$$\mathbf{EB} = \mathrm{inv}. \qquad (63.2)$$

Из (63.2) следует, что в случае, когда в какой-либо системе отсчета поля **B** и **E** взаимно перпендикулярны (т. е. $\mathbf{EB} = 0$), то они будут взаимно перпендикулярными и во всякой другой инерциальной системе отсчета.

Из (63.1) вытекает, что в случае, когда в какой-либо системе отсчета модули векторов **B** и **E** одинаковы (т. е. $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = 0$), то они будут одинаковыми в любой другой системе отсчета.

Кроме того, из инвариантности выражений (63.1) и (63.2) можно сделать следующие выводы. Если в

какой-либо системе отсчета векторы **B** и **E** образуют острый (или тупой) угол (**EB** больше либо меньше нуля), то они будут образовывать острый (или тупой) угол во всякой другой системе. Если в какой-либо системе $B > E$ (или $B < E$) (т. е. $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$ больше либо меньше нуля), то и в любой другой системе будет сохраняться такое же соотношение между модулями векторов **B** и **E**.

В случае, когда оба инварианта равны нулю, векторы **B** и **E** во всех инерциальных системах отсчета взаимно перпендикулярны и равны по величине.

Если равен нулю только инвариант (63.2), т. е. $\mathbf{EB} = 0$, то можно найти такую систему отсчета, в которой равно нулю одно из полей, **B** или **E**, какое именно, определяется знаком выражения $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$. Справедливо и обратное соотношение: если в какой-либо системе равно нулю одно из полей, **B** или **E**, то во всякой другой системе поля будут взаимно перпендикулярными (к этому заключению мы уже пришли ранее, анализируя формулы преобразования полей).

Надо иметь в виду, что поля **B** и **E**, вообще говоря, меняются от точки к точке. Поэтому инварианты (63.1) и (63.2) могут иметь в разных точках поля разные значения. Высказанные выше утверждения о свойствах полей относятся к тем точкам поля, для которых выполняются принимаемые предположения (например, равенство нулю данного инварианта и т. д.). Если эти предположения выполняются во всех точках поля, то, разумеется, и утверждения о свойствах полей также будут относиться ко всем точкам.

Приняв во внимание сделанные замечания, допустим, что в системе K в некоторой точке поля произведение **EB** отлично от нуля, т. е. что поля в данной точке не перпендикулярны друг другу. Тогда можно найти такую систему отсчета K', в которой поля в данной точке параллельны друг другу. В этой системе $\mathbf{E}'\mathbf{B}' = E'B'$, так что получается два уравнения:

$$B'^2 - E'^2 = B^2 - E^2, \quad E'B' = \mathbf{EB}.$$

Решив совместно эти уравнения, найдем значения величин E' и B' в той системе отсчета, в которой поля $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ параллельны (векторы **E** и **B** заданы).

Инварианты поля можно найти, исходя из общих свойств тензоров. В Приложении X показано, что при

перемножении тензоров m-го и n-го рангов получается тензор $(m+n)$-го ранга, а также что свертывание тензора по любой паре индексов понижает ранг тензора на две единицы. В частности, свертка тензора второго ранга, равная сумме его диагональных компонент, называется следом (шпуром) тензора и представляет собой инвариант (см. формулы (X.21) и (XII.63)).

В случае антисимметричного тензора, каковым является тензор электромагнитного поля, след равен нулю, так что этот инвариант интереса не представляет.

Образуем произведение тензоров (61.8) и (61.9), т. е. тензор с компонентами $F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$. Он представляет собой тензор четвертого ранга. Произведем двойную свертку этого тензора, положив равными индексы μ и ρ, а также ν и σ и произведя суммирование по этим индексам. В результате ранг тензора понизится на четыре единицы (каждая из двух сверток понижает ранг на два) и мы получим тензор нулевого ранга, т. е. инвариант:

$$\sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathrm{inv}.$$

Подстановка сюда значений $F_{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$ из (61.8) и (61.9) приводит к соотношению

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\sum_{k=1}^{3} E_k^2 + 2\sum_{k=1}^{3} B_k^2 = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) = \mathrm{inv}, \tag{63.3}$$

что согласуется с формулой (63.1).

Теперь образуем 4-тензор восьмого ранга

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}, \tag{63.4}$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ — абсолютно антисимметричный единичный 4-псевдотензор четвертого ранга (см. Приложение XII, текст, следующий за формулой (XII.68)). Отличные от нуля компоненты этого тензора равны $+1$ или -1 в зависимости от того, каким числом перестановок — четным или нечетным — может быть получена данная последовательность индексов μ, ν, ρ, σ, из последовательности 0, 1, 2, 3. В табл. 63.1 приведены все перестановки индексов с указанием знака при единице, который им соответствует.

Таблица 63.1

Последовательность	Знак	Последовательность	Знак	Последовательность	Знак	Последовательность	Знак
0 1 2 3	+	1 3 2 0	+	2 0 1 3	+	3 2 1 0	+
0 1 3 2	—	1 3 0 2	—	2 0 3 1	—	3 2 0 1	—
0 2 3 1	+	1 2 0 3	+	2 1 3 0	+	3 1 0 2	+
0 2 1 3	—	1 2 3 0	—	2 1 0 3	—	3 1 2 0	—
0 3 1 2	+	1 0 3 2	+	2 3 0 1	+	3 0 2 1	+
0 3 2 1	—	1 0 2 3	—	2 3 1 0	—	3 0 1 2	—

Четырехкратная свертка тензора (63.4) представляет собой инвариант:

$$\sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \text{inv}. \tag{63.5}$$

Написав 24 отличных от нуля слагаемых суммы (63.5) (знак слагаемых нужно взять из табл. 63.1), легко убедиться в том, что их можно подразделить на шесть групп, включающих в себя по четыре совпадающих выражения:

$$\sum = 4F_{01}F_{23} - 4F_{01}F_{32} + 4F_{02}F_{31} - \\ - 4F_{02}F_{13} + 4F_{03}F_{12} - 4F_{03}F_{21}. \tag{63.6}$$

Вследствие антисимметричности тензора $F_{\mu\nu}$ произведения $F_{01}F_{32} = -F_{01}F_{23}$ и т. д. Поэтому выражение (63.6) упрощается следующим образом:

$$\sum = 8(F_{01}F_{23} + F_{02}F_{31} + F_{03}F_{12}) = \text{inv}.$$

Инвариантным будет, очевидно, и выражение в скобках. Подстановка значений (61.8) для $F_{\mu\nu}$ дает

$$E_x(-B_x) + E_y(-B_y) + E_z(-B_z) = \text{inv},$$

что совпадает с (63.2).

§ 64. Уравнения Максвелла в четырехмерной форме

Первая пара уравнений Максвелла (т. е. уравнения (55.12)) может быть записана в виде одного уравнения для компонент тензора (61.8)

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \tag{64.1}$$

Заметим, что индексы в каждом из слагаемых образуют циклическую перестановку последовательности: μ, ν, ρ.

Выражение (64.1) представляет собой совокупность четырех уравнений, первое из которых получается при μ, ν, ρ, равных соответственно 0, 1, 2, второе — при μ, ν, ρ, равных 1, 2, 3, третье — при μ, ν, ρ, равных 2, 3, 0, и, наконец, четвертое — при μ, ν, ρ, равных 3, 0, 1. В силу антисимметрии тензора $F_{\mu\nu}$ уравнение, получающееся при любой другой комбинации трех несовпадающих индексов, сводится к одному из указанных четырех.

Напишем уравнение (64.1), положив $\mu=0$, $\nu=1$, $\rho=2$,

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_{20}}{\partial x^1}=0$$

Подставив значения $F_{\mu\nu}$ и координат x^μ, получим

$$\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

Найденное соотношение представляет собой z-ю компоненту векторного уравнения (55.12). Аналогично, уравнения для $\mu=2$, $\nu=3$, $\rho=0$ и $\mu=3$, $\nu=0$, $\rho=1$ дают x-ю и y-ю компоненты того же уравнения. (Получается уравнение для той компоненты, индекс которой отсутствует в наборе значений μ, ν, ρ.)

Положив $\mu=1$, $\nu=2$, $\rho=3$, придем к формуле

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x^2}=0,$$

которая после подстановки значений $F_{\mu\nu}$ и x^μ переходит в соотношение

$$-\frac{\partial B_z}{\partial z}-\frac{\partial B_x}{\partial x}-\frac{\partial B_y}{\partial y}=0,$$

эквивалентное второму из уравнений (55.10).

Таким образом, мы убедились в том, что уравнение (64.1) эквивалентно первой паре уравнений Максвелла.

Вторая пара уравнений Максвелла, т. е. уравнения (55.13), может быть записана в виде

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu} \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (64.2)$$

Действительно, положим, например, $\mu = 1$. Тогда уравнение (64.2) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = -\frac{4\pi}{c} j^1$$

$(F^{11} = 0)$. Подставив значения $F^{\mu\nu}$ и x^{μ}, а также сгруппировав надлежащим образом члены, получим уравнение

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t},$$

представляющее собой x-ю компоненту векторного уравнения (55.13). Аналогично, уравнения для $\mu = 2$ и $\mu = 3$ дают y-ю и z-ю компоненты того же уравнения.

При $\mu = 0$ уравнение (64.2) имеет вид

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -4\pi\rho.$$

Подстановка значений $F^{\mu\nu}$ и x^{μ} дает

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -4\pi\rho,$$

что совпадает со вторым из уравнений (55.13).

Таким образом, мы показали, что уравнение (64.2) эквивалентно второй паре уравнений Максвелла.

§ 65. Уравнение движения частицы в поле

Согласно (38.16) уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vB}]. \qquad (65.1)$$

Разделив обе части равенства на $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ и приняв во внимание, что $dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ есть $d\tau$ (см. формулу

(34.13)), получим

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{e}{c}\,\frac{c\mathbf{E}+[\mathbf{v}\mathbf{B}]}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

или, в компонентах,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)&=\frac{e}{c}\,\frac{cE_x+v_yB_z-v_zB_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\\ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{mv_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)&=\frac{e}{c}\,\frac{cE_y+v_zB_x-v_xB_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\\ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)&=\frac{e}{c}\,\frac{cE_z+v_xB_y-v_yB_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.\end{aligned}\qquad(65.2)$$

Но $v_k/\sqrt{1-v^2/c^2}=u^k$, $c/\sqrt{1-v^2/c^2}=u^0$ (см. (36.6)). Далее, $E_x=F^{10}$, $E_y=F^{20}$, $E_z=F^{30}$, $B_x=F^{32}=-F^{23}$, $B_y=F^{13}=-F^{31}$, $B_z=F^{21}=-F^{12}$. Поэтому уравнения (65.2) можно написать следующим образом:

$$\begin{aligned}m\frac{du^1}{d\tau}&=\frac{e}{c}(F^{10}u_0+F^{12}u_2+F^{13}u_3),\\ m\frac{du^2}{d\tau}&=\frac{e}{c}(F^{20}u_0+F^{21}u_1+F^{23}u_3),\\ m\frac{du^3}{d\tau}&=\frac{e}{c}(F^{30}u_0+F^{31}u_1+F^{32}u_2).\end{aligned}\qquad(65.3)$$

Справа мы использовали ковариантные компоненты 4-скорости для того, чтобы все слагаемые были со знаком «+».

Теперь воспользуемся тем, что быстрота изменения энергии частицы равна работе, совершаемой в единицу времени силами, действующими на частицу,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\left(e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]\right)\mathbf{v}=e\mathbf{E}\mathbf{v}.\qquad(65.4)$$

Разделив обе части этого уравнения на $c\sqrt{1-v^2/c^2}$, получим

$$m\frac{du^0}{d\tau}=\frac{e}{c}(F^{01}u_1+F^{02}u_2+F^{03}u_3).\qquad(65.5)$$

Совокупность уравнений (65.3) и (65.5) можно записать в виде одного уравнения

$$m\frac{du^\mu}{d\tau}=\frac{e}{c}\sum_{\nu=0}^{3}F^{\mu\nu}u_\nu\qquad(\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3).\qquad(65.6)$$

Это и есть уравнение движения частицы в поле, записанное в четырехмерной форме. Его пространственные компоненты эквивалентны уравнению (65.1), а временнáя компонента эквивалентна уравнению (65.4).

Уравнению (65.6) можно придать несколько иной вид. Опустим в обеих частях формулы (65.6) свободный индекс μ вниз. Кроме того, переместим одновременно немой индекс ν при $F^{\mu\nu}$ вниз, а при u_ν вверх. В результате получим

$$m\frac{du_\mu}{d\tau}=\frac{e}{c}\sum_{\nu=0}^{3}F_{\mu\nu}u^\nu \quad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (65.7)$$

Последнее уравнение можно получить непосредственно из уравнений (65.1) и (65.4), если заменить в них левую часть ковариантными компонентами 4-скорости, а величины E_k и B_k представить как компоненты тензора (61.8).

Глава XII

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

§ 66. Действие для заряженной частицы в электромагнитном поле

Согласие с опытом получается в том случае, если в качестве действия для частицы в поле принять выражение

$$S=\int_1^2\left(-mc\,ds-\frac{e}{c}\sum_{\mu=0}^{3}A_\mu\,dx^\mu\right), \qquad (66.1)$$

где m — масса частицы, e — ее заряд, A_μ — 4-потенциал поля. Обращаем внимание на то, что под знаком интеграла стоит, как это и должно быть, инвариант. При $A_\mu=0$ выражение (66.1) переходит в действие для свободной частицы (см. формулу (39.7)).

Отметим, что неоднозначность потенциала не оказывает влияния на уравнения движения. Действительно, заменив A_μ в (66.1) величинами $\bar{A}_\mu$ (см. формулы (60.16) и (60.17)), получим под знаком интеграла дополнительные слагаемые

$$-\frac{e}{c}\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}dx^k+C\,dx^0\right]=-\frac{e}{c}\left[d\psi\left(x_1^1x_1^2x_1^3\right)+C\,dx^0\right]$$

При интегрировании этих слагаемых получается постоянная величина

$$-\frac{e}{c}\int_1^2(d\psi+C\,dx^0)=$$

$$=-\frac{e}{c}\left[\psi(2)+Cx^0_{(2)}\right]+\frac{e}{c}\left[\psi(1)+Cx^0_{(1)}\right],$$

которая при варьировании действия дает нуль.

Выражение (66.1) состоит из двух членов. Первый зависит только от свойств частицы (от m). Второй описывает взаимодействие частицы с полем, в соответствии с чем содержит как величину, характеризующую частицу (заряд e), так и величину, характеризующую поле (потенциал A_μ). Вообще говоря, нужно было бы включить еще член, описывающий само поле. Но, рассматривая движение частицы в заданном поле, этот член можно не принимать во внимание, так как он в силу определенности поля не должен варьироваться. Правда, это утверждение оказывается справедливым лишь при условии, что заряд частицы настолько мал, что его влиянием на поле можно пренебречь. При рассмотрении движения частицы в заданном поле мы будем предполагать, что это условие выполнено.

Получим уравнения движения частицы, исходя из принципа наименьшего действия. Согласно этому принципу для истинной траектории частицы выполняется условие

$$\delta S = \delta \int_1^2 \left(-mc \sqrt{\sum dx_\mu \, dx^\mu} - \frac{e}{c} \sum A_\mu \, dx^\mu \right) = 0$$

(мы произвели замену: $ds^2 = \sum dx_\mu \, dx^\mu$). Осуществив варьирование, получим

$$\delta S = \int_1^2 \left(-mc \sum \frac{dx_\mu d(\delta x^\mu)}{ds} - \frac{e}{c} \sum A_\mu d(\delta x^\mu) - \right.$$
$$\left. - \frac{e}{c} \sum \delta A_\mu \, dx^\mu \right) = 0 \qquad (66.2)$$

(см. формулу (39.9); напомним, что $\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$).

Проинтегрируем первые два члена в подынтегральном выражении по частям. В результате первый член примет вид

$$\int_1^2 m \sum \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau,$$

где τ — собственное время частицы, u_μ — 4-скорость частицы (см. формулу (39.11)). Интегрирование по

частям второго члена дает

$$-\int_1^2 \frac{e}{c} \sum A_\mu d(\delta x^\mu) = -\frac{e}{c} \sum A_\mu \delta x^\mu \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{e}{c} \sum \delta x^\mu \, dA_\mu.$$

Первое выражение справа есть нуль, так как на концах траектории $\delta x^\mu = 0$. Следовательно, после интегрирования по частям первых двух членов выражение (66.2) приводится к виду

$$\delta S = \int_1^2 \left(m \sum_\mu \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau + \frac{e}{c} \sum_\mu \delta x^\mu \, dA_\mu - \right.$$
$$\left. - \frac{e}{c} \sum_\nu \delta A_\nu \, dx^\nu \right) = 0$$

(как сейчас выяснится, в третьем члене целесообразно обозначить немой индекс буквой ν).

Теперь произведем замены:

$$dA_\mu = \sum_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \sum_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu d\tau \text{ — во втором члене,}$$

$$\delta A_\nu = \sum_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \quad \text{и} \quad dx^\nu = u^\nu d\tau \text{ — в третьем члене.}$$

В итоге получим

$$\delta S = \int_1^2 \left(m \sum_\mu \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} d\tau + \frac{e}{c} \sum_\mu \delta x^\mu \sum_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu d\tau - \right.$$
$$\left. - \sum_\nu u^\nu d\tau \sum_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \right) = 0,$$

что можно записать следующим образом:

$$\delta S = \int_1^2 \sum_\mu \left(m \frac{du_\mu}{d\tau} + \frac{e}{c} \sum_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu - \right.$$
$$\left. - \frac{e}{c} \sum_\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} u^\nu \right) \delta x^\mu d\tau = 0.$$

Для того чтобы написанное условие выполнялось при произвольных δx^μ, необходимо равенство нулю всех

выражений, стоящих в круглых скобках. Отсюда вытекают соотношения

$$m\frac{du_\mu}{d\tau}=\frac{e}{c}\sum_\nu\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)u^\nu$$

или

$$m\frac{du_\mu}{d\tau}=\frac{e}{c}\sum_\nu F_{\mu\nu}u^\nu \qquad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3) \qquad (66.3)$$

(см. формулу (61.5)), что совпадает с (65.7).

Таким образом, мы получили уравнение движения частицы в поле, исходя из принципа наименьшего действия.

§ 67. Действие для электромагнитного поля

В предыдущем параграфе мы считали поле, в котором движется частица, заданным, в связи с чем слагаемое в действии, описывающее свойства самого поля, мы не учитывали. Теперь рассмотрим систему, состоящую из частиц, находящихся в электромагнитном поле, и попытаемся, исходя из принципа наименьшего действия, найти уравнения, определяющие поле. При этом мы можем отказаться от предположения о малости зарядов частиц и получить уравнения для истинного поля, т. е. поля, получающегося при сложении внешнего поля с полем, созданным самими зарядами. Следовательно, величины A_μ должны будут зависеть от положений и скоростей частиц.

Действие для системы поле + частицы должно состоять из трех частей:

$$S=S_f+S_m+S_{mf}. \qquad (67.1)$$

Здесь S_f есть та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля, т. е. действие для поля в отсутствие зарядов; S_m — та часть действия, которая зависит только от свойств частиц, т. е. действие для свободных зарядов. И, наконец, S_{mf} есть та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем.

Что касается последних двух членов, то их значения можно получить, сложив выражения (66.1) для

всех частиц. Следовательно,

$$S_m = -\sum_{a=1}^{N} m_a c \int ds_a, \qquad (67.2)$$

$$S_{mf} = -\sum_{a=1}^{N} \frac{e_a}{c} \int \sum_{\mu=0}^{3} A_{\mu a}\, dx^{\mu}_{a}. \qquad (67.3)$$

Здесь a — номер частицы, N — число рассматриваемых частиц, $A_{\mu a}$ — потенциал поля в той точке 4-пространства, где находится частица с номером a. Индекс a следует отличать от применяемых для обозначения компонент 4-векторов и 4-тензоров индексов μ, ν, ρ, ... Для последних индексов нужно различать верхнее и нижнее положение. Для индекса a такое различие не имеет смысла.

Выражению (67.3) можно придать другой вид. С этой целью заменим в нем dx^{μ}_{a} через $(dx^{\mu}_{a}/dt)\,dt$, т. е. напишем

$$S_{mf} = -\sum_{a} \frac{e_a}{c} \int \sum_{\mu} A_{\mu a} \frac{dx^{\mu}_{a}}{dt}\, dt.$$

Далее представим совокупность точечных зарядов e_a как заряд, распределенный в пространстве с плотностью

$$\rho = \sum_{a} e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

(см. (41.12)). Тогда заряд, заключенный в элементе объема dV, можно записать как $de = \rho\, dV$ и сумму вида $\sum e_a f(x_a, y_a, z_a)$ заменить интегралом

$$\int \rho(x, y, z) f(x, y, z)\, dV.$$

В результате получим

$$S_{mf} = -\frac{1}{c} \int \rho\, dV \int \sum_{\mu} A_{\mu} \frac{dx^{\mu}}{dt}\, dt.$$

Теперь учтем, что $\rho(dx^{\mu}/dt) = j^{\mu}$, где j^{μ} — компонента 4-тока (см. формулу (60.8)). Значит, можно

написать

$$S_{mf} = -\frac{1}{c}\int\sum_{\mu} A_\mu j^\mu \, dV\, dt = -\frac{1}{c^2}\int\sum_{\mu} A_\mu j^\mu \, dV^*, \quad (67.4)$$

где $dV^* = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c\,dV dt$.

Чтобы получить выражение для слагаемого S_f, примем во внимание, что, как показывает опыт, электромагнитное поле подчиняется принципу суперпозиции. Поэтому уравнения для поля должны быть линейными дифференциальными уравнениями. Уравнения поля получаются варьированием действия, при варьировании же степень подынтегрального выражения понижается на единицу. Следовательно, уравнения окажутся линейными в том случае, если в действии под знаком интеграла будет стоять выражение, квадратичное по полю. Кроме того, это выражение должно быть инвариантным. Простейшими квадратичными инвариантами, которые можно образовать из характеристик поля, являются два: $\sum A_\mu A^\mu$ и $\sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Первый инвариант для нашей цели непригоден, так как 4-потенциал определен неоднозначно. Таким образом, мы приходим к выводу, что под знаком интеграла в действии должен стоять инвариант $\sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Чтобы получить действие для всего поля, нужно произвести интегрирование по всему 4-пространству, где поле отлично от нуля. Итак, мы приходим к выражению

$$S_f = \alpha\int\sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\, dV^*,$$

где α — некоторая константа, $dV^* = c\,dV\,dt$. Интегрирование по координатам осуществляется по всему трехмерному пространству, а по времени между двумя заданными моментами t_1 и t_2.

Из найденного нами выражения получаются правильные уравнения поля, если положить (в гауссовой системе) $\alpha = -1/16\pi c$. Тогда

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int\sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\, dV^*. \quad (67.5)$$

Сложив выражения (67.2), (67.4) и (67.5), получим действие для системы поле + частицы:

$$S = -\sum_a m_a c \int ds_a - \frac{1}{c^2}\int \sum_\mu A_\mu j^\mu \, dV^* - \\ - \frac{1}{16\pi c}\int \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\, dV^*. \quad (67.6)$$

Согласно формуле (63.3) $\sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$. Подставив это значение в (67.5), а также заменив dV^* через $c\,dV\,dt$, можно привести выражение для S_f к виду

$$S_f = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\, dV. \quad (67.7)$$

Из этой формулы вытекает, что функция Лагранжа для поля определяется выражением

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\, dV. \quad (67.8)$$

Итак, мы установили вид действия для электромагнитного поля. Как найти уравнения поля, исходя из принципа наименьшего действия, будет объяснено в следующем параграфе.

§ 68. Вывод уравнений Максвелла из принципа наименьшего действия

Найдем уравнения поля, считая движение зарядов заданным. В этом случае член S_m в действии можно не принимать во внимание, поскольку он в силу определенности движения зарядов не должен варьироваться. Итак, будем исходить из выражения

$$S = S_f + S_{mf} = -\frac{1}{16\pi c}\int \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\, dV^* - \\ - \frac{1}{c^2}\int \sum_\mu A_\mu j^\mu \, dV^* \quad (68.1)$$

(см. (67.5) и (67.4)).

Вычислим вариацию выражения (68.1) и приравняем ее нулю. При этом учтем, что в связи с определенностью движения зарядов ток j^μ не должен варьироваться. Следовательно,

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi c}\int \delta\left(\sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)dV^* - \frac{1}{c^2}\int \sum j^\mu\,\delta A_\mu\,dV^*. \tag{68.2}$$

Определим вариацию, стоящую под знаком первого интеграла,

$$\delta \sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \sum F_{\mu\nu}\,\delta F^{\mu\nu} + \sum F^{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu}.$$

Поднимем индексы у первого сомножителя первой из сумм и одновременно опустим их у второго сомножителя. В результате получим

$$\delta \sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\sum F^{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu}.$$

Приняв во внимание формулу (61.5) для $F_{\mu\nu}$, напишем это выражение следующим образом:

$$\delta \sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\sum F^{\mu\nu}\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right) =$$

$$= 2\sum F^{\mu\nu}\delta\,\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - 2\sum F^{\mu\nu}\,\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Воспользовавшись антисимметричностью тензора $F^{\mu\nu}$, заменим в первой сумме $F^{\mu\nu}$ через $-F^{\nu\mu}$, а затем поменяем в этой сумме индексы μ и ν. В итоге первая сумма станет тождественной со второй и мы получим, что

$$\delta \sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4\sum F^{\mu\nu}\delta\,\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{68.3}$$

Изменив последовательность дифференцирования и варьирования величин A_μ, приведем (68.3) к виду

$$\delta \sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4\sum F^{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\,\delta A_\mu.$$

Теперь преобразуем полученное выражение по формуле $uv' = (uv)' - u'v$:

$$\delta \sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4\sum \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(F^{\mu\nu}\,\delta A_\mu\right) +$$

$$+ 4\sum \delta A_\mu\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\,F^{\mu\nu}.$$

Подставив это выражение в (68.2), придем к следующей формуле для вариации действия:

$$\delta S = \frac{1}{4\pi c}\int \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(F^{\mu\nu}\,\delta A_{\mu}\right) dV^{*} - \\ - \frac{1}{4\pi c}\int \sum_{\mu,\nu} \delta A_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} F^{\mu\nu}\, dV^{*} - \frac{1}{c^{2}}\int \sum_{\mu} j^{\mu}\,\delta A_{\mu}\, dV^{*}. \quad (68.4)$$

Первый из трех интегралов можно преобразовать по формуле Остроградского — Гаусса в поверхностный интеграл:

$$\int \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(F^{\mu\nu}\,\delta A_{\mu}\right) dV^{*} = \int \sum_{\mu,\nu} F^{\mu\nu}\,\delta A_{\mu}\, df_{\nu}.$$

На границе рассматриваемого 4-объема $\delta A_{\mu} = 0$. Поэтому написанный нами интеграл исчезает. Таким образом, в формуле (68.4) нужно сохранить только второй и третий члены. Объединив их вместе и вынеся за скобки общий множитель δA_{μ}, получим

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \sum_{\mu}\left(\frac{1}{4\pi}\sum_{\nu}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{c} j^{\mu}\right)\delta A_{\mu}\, dV^{*}.$$

В силу произвольности вариаций δA_{μ} найденное нами значение δS может оказаться равным нулю только в том случае, если все выражения в круглых скобках будут нулями. Следовательно, мы приходим к уравнениям

$$\sum_{\nu}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu} \qquad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \qquad (68.5)$$

которые представляют собой вторую пару уравнений Максвелла (см. уравнения (64.2)).

Отметим, что связь между полями **B** и **E**, с одной стороны, и зарядами и токами, с другой стороны, определяется именно второй парой уравнений Максвелла (см. уравнения (55.13)). Первая же пара уравнений Максвелла выражает свойства полей **B** и **E** и их связь друг с другом (см. уравнения (55.12)).

§ 69. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля [1])

В § 67 мы установили, что действие для электромагнитного поля определяется выражением

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\, dV^* \qquad (69.1)$$

(см. формулу (67.5)).

Сопоставление формул (69.1) и (40.2) показывает, что в качестве плотности функции Лагранжа для поля нужно взять выражение

$$L^* = -\frac{1}{16\pi}\sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \qquad (69.2)$$

В качестве обобщенных координат q_a для поля следует принять компоненты потенциала A_μ, а в качестве обобщенных скоростей — производные этих компонент по координатам x^ν. Чтобы упростить запись формул, введем обозначение

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = a_{\mu\nu}. \qquad (69.3)$$

Приравняв вариацию действия нулю и проделав такие же выкладки, какие в § 40 привели нас к уравнениям движения (40.12), придем к соотношениям

$$\frac{\partial L^*}{\partial A_\mu} = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial L^*}{\partial a_{\mu\nu}} \qquad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (69.4)$$

Уравнения (69.4) суть уравнения поля. Чтобы определить значения входящих в них производных, напишем вариацию функции L^*. По общим правилам вычисления вариации

$$\delta L^* = \sum_\mu \frac{\partial L^*}{\partial A_\mu}\delta A_\mu + \sum_{\mu,\nu}\frac{\partial L^*}{\partial a_{\mu\nu}}\delta a_{\mu\nu}. \qquad (69.5)$$

---

[1]) Перед тем как приступить к чтению этого параграфа, следует восстановить в памяти содержание § 40.

С другой стороны, вариация функции (69.2) равна

$$\delta L^* = -\frac{1}{16\pi}\delta\sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\sum_{\mu,\nu} F^{\mu\nu}\delta\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{1}{4\pi}\sum_{\mu,\nu} F^{\mu\nu}\,\delta a_{\mu\nu}$$

(см. формулу (68.3)).

Сравнение полученного выражения с формулой (69.5) позволяет заключить, что

$$\frac{\partial L^*}{\partial A_\mu} = 0, \quad \frac{\partial L^*}{\partial a_{\mu\nu}} = \frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}. \tag{69.6}$$

Заменив во втором выражении $F^{\mu\nu}$ на $-F^{\nu\mu}$ и затем поменяв местами индексы μ и ν, найдем, что

$$\frac{\partial L^*}{\partial a_{\nu\mu}} = -\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}. \tag{69.7}$$

Подстановка значений (69.6) в формулу (69.4) приводит к следующим «уравнениям движения» для электромагнитного поля:

$$\sum_\nu \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{69.8}$$

(мы опустили множитель $1/4\pi$). Полученное уравнение есть уравнение Максвелла (64.2), написанное для случая $j^\mu = 0$. Такого результата и следовало ожидать, поскольку мы исходили из действия для одного лишь поля без зарядов.

Теперь установим вид тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Подставив в формулу (40.16) вместо $\dot{q}_{a\mu}$ величины $a_{\rho\mu}$ (см. (40.3) и (69.3)), получим для компонент этого тензора следующее выражение:

$$\tilde{T}_\mu{}^\nu = \sum_\rho a_{\rho\mu}\frac{\partial L^*}{\partial a_{\rho\nu}} - \delta_\mu^\nu L^*.$$

Заменим в соответствии с (69.7) $\partial L^*/\partial a_{\rho\nu}$ через $-(1/4\pi)F^{\nu\rho}$. Кроме того, подставим вместо $a_{\rho\mu}$ ее значение (69.3), а вместо L^* — выражение (69.2). В результате получим

$$\tilde{T}_\mu{}^\nu = -\frac{1}{4\pi}\sum_\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial x^\mu}F^{\nu\rho} + \frac{1}{16\pi}\delta_\mu^\nu \sum_{\beta,\gamma} F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma} \tag{69.9}$$

(во второй сумме нельзя обозначить немые индексы буквами μ, ν, как это сделано в формуле (69.2), поскольку в формуле (69.9) μ и ν были уже выбраны в качестве свободных индексов).

Тензор (69.9) несимметричен. Для его симметризации прибавим к нему тензор

$$G_\mu{}^\nu = \frac{1}{4\pi} \sum_\rho \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} F^{\nu\rho}, \qquad (69.10)$$

который, как мы сейчас покажем, можно представить в виде

$$G_\mu{}^\nu = \sum_\rho \frac{\partial Q_\mu^{\nu\rho}}{\partial x^\rho}, \quad \text{где} \quad Q_\mu^{\nu\rho} = -Q_\mu^{\rho\nu}$$

(см. формулу (40.18)). Действительно, применим к выражению (69.10) преобразование $uv' = (uv)' - u'v$:

$$G_\mu{}^\nu = \frac{1}{4\pi} \sum_\rho \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} F^{\nu\rho} = \frac{1}{4\pi} \sum_\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} (A_\mu F^{\nu\rho}) - \frac{1}{4\pi} \sum_\rho A_\mu \frac{\partial F^{\nu\rho}}{\partial x^\rho}.$$

Вторая сумма в силу (69.8) равна нулю (A_μ можно вынести за знак суммы). Следовательно, мы привели тензор (69.10) к виду

$$G_\mu{}^\nu = \sum_\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{1}{4\pi} A_\mu F^{\nu\rho} \right).$$

Поскольку выражение в скобках антисимметрично по индексам ν и ρ, прибавление к тензору (69.9) выражения (69.10) допустимо (см. формулу (40.18) и связанный с нею текст).

Сложив выражения (69.9) и (69.10), получим тензор

$$T_\mu{}^\nu = -\frac{1}{4\pi} \sum_\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial x^\mu} F^{\nu\rho} + \frac{1}{4\pi} \sum_\rho \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} F^{\nu\rho} + \frac{1}{16\pi} \delta_\mu^\nu \sum_{\beta,\gamma} F_{\beta\gamma} F^{\beta\gamma} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \sum_\rho \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} \right) F^{\nu\rho} + \frac{1}{16\pi} \delta_\mu^\nu \sum_{\beta,\gamma} F_{\beta\gamma} F^{\beta\gamma}.$$

Выражение в круглых скобках есть $F_{\mu\rho}$ (см. (61.5)). Следовательно, формула для смешанных компонент тензора энергии-импульса приобретает вид

$$T_{\mu}{}^{\nu} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\rho} F_{\mu\rho}F^{\nu\rho} + \frac{1}{16\pi}\delta_{\mu}^{\nu}\sum_{\beta,\gamma} F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma}. \quad (69.11)$$

Чтобы перейти к контравариантным компонентам, поднимем во всех членах формулы (69.11) индекс μ вверх. При этом δ_{μ}^{ν} превратится в $g^{\mu\nu}$ (см. (XII.66) и (XII.67)). Таким образом,

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\rho} F^{\mu}{}_{\rho}F^{\nu\rho} + \frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}\sum_{\beta,\gamma} F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma}. \quad (69.12)$$

Поднятие какого-либо индекса у одного из сомножителей при одновременном опускании этого же индекса у второго сомножителя не изменяет произведения. Поэтому с равным основанием можно написать, что

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\rho} F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} + \frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}\sum_{\beta,\gamma} F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma}. \quad (69.13)$$

Сопоставление выражений (62.12) и (62.13) позволяет заключить, что тензор $T^{\mu\nu}$ действительно симметричен.

Вычислим след тензора $T^{\mu\nu}$. Согласно формуле (69.11)

$$\sum_{\mu} T_{\mu}^{\mu} = \sum_{\mu}\left(-\frac{1}{4\pi}\sum_{\rho} F_{\mu\rho}F^{\mu\rho}\right) + \sum_{\mu}\left(\frac{1}{16\pi}\delta_{\mu}^{\mu}\sum_{\beta,\gamma} F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma}\right).$$

Во втором члене все множители, кроме δ_{μ}^{μ}, можно вынести за знак суммы по μ. Сумма же $\sum \delta_{\mu}^{\mu}$ равна четырем. Таким образом,

$$\sum_{\mu} T_{\mu}^{\mu} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\mu,\rho} F_{\mu\rho}F^{\mu\rho} + 4\,\frac{1}{16\pi}\sum_{\beta,\gamma} F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma}.$$

Последнее выражение равно нулю. Следовательно, мы установили, что след тензора $T^{\mu\nu}$ равен нулю:

$$\sum_{\mu} T_{\mu}^{\mu} = 0. \quad (69.14)$$

Найдем выражения компонент тензора $T^{\mu\nu}$ через компоненты векторов **E** и **B**. Для этого подставим

в (69.13) значения компонент $F^{\mu\nu}$. Эти значения мы возьмем из (61.9), причем будем учитывать, что опускание временно́го индекса не изменяет компоненты тензора, а опускание пространственного индекса изменяет знак компоненты на обратный. Примем также во внимание, что сумма $\sum F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ есть инвариант, который мы вычислили в § 63. Он равен

$$\sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(B^2 - E^2\right) \tag{69.15}$$

(см. формулу (63.3)).

Начнем с вычисления T^{00}. Согласно (69.13), (61.9) и (69.15)

$$T^{00} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\rho} F^{0\rho}F^0_\rho + \frac{1}{16\pi}g^{00}2\left(B^2 - E^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(-E^2\right) + \frac{1}{16\pi}2\left(B^2 - E^2\right) = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) = w$$

($g^{00} = 1$; см. (XII.67)). Мы получили уже известный результат: компонента T^{00} равна плотности энергии w (см. формулу (40.27)).

Теперь найдем компоненту T^{01}. Поскольку $g^0 = 0$,

$$T^{01} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\rho} F^{0\rho}F^1_\rho =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[0\cdot E_x + (-F_x)\cdot 0 + (-E_y)B_z + (-E_z)(-B_y)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(E_yB_z - E_zB_y\right) = \left\{\frac{1}{4\pi}[\mathbf{EB}]\right\}_x = \frac{1}{c}S_x, \tag{69.16}$$

где S_x — x-я компонента вектора Пойнтинга в вакууме $\mathbf{H} = \mathbf{B}$). Аналогичные выкладки дают, что $T^{02} = S_y/c$, $T^{03} = S_z/c$ (ср. с формулой (40.32)).

Наконец, вычислим, например, T^{12}. Согласно (XII.67) $g^{12} = 0$. Поэтому

$$T^{12} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\rho} F^{1\rho}F^2_\rho =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[E_xE_y + 0\cdot(-B_z) + (-B_z)\cdot 0 + B_yB_x\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(E_xE_y + B_xB_y\right) = \sigma_{xy},$$

где σ_{xy} — компонента максвелловского тензора натяжений (см. формулу (59.12)). Легко проверить, что

все остальные компоненты вида T^{ik} совпадают с соответствующими компонентами тензора (59.12):

$$T^{ik} = \sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}(E^2 + B^2)\,\delta_{ik} - E_i E_k - B_i B_k\right\} \qquad (69.17)$$

(при проверке надо учесть, что $g^{ii} = -1 = -\delta_{ii}$; см. (XII.67)).

Рассмотрим вопрос о приведении тензора $T^{\mu\nu}$ к диагональному виду. В евклидовом пространстве такое преобразование симметричного тензора возможно всегда. В псевдоевклидовом же пространстве, как мы сейчас увидим, дело обстоит иначе. Согласно (69.16) компоненты вида $T^{0i} = T^{i0}$ будут равны нулю при условии, что

$$[\mathbf{EB}] = 0. \qquad (69.18)$$

Согласно (69.17) компоненты вида T^{ik} $(i \neq k)$ будут равны нулю при условии, что

$$E_i E_k = 0 \quad \text{и} \quad B_i B_k = 0 \quad (i \neq k). \qquad (69.19)$$

Таким образом, для того чтобы привести тензор $T^{\mu\nu}$ к диагональному виду, нужно перейти к системе отсчета, в которой векторы **B** и **E** коллинеарны либо один из них равен нулю (тогда будет выполнено условие (69.18)). В § 62 мы выяснили, что такая система существует всегда, за исключением случая, когда **B** и **E** взаимно перпендикулярны и одинаковы по модулю. В указанной системе отсчета одну из координатных осей нужно направить вдоль поля. Тогда окажется выполненным условие (69.19). В итоге тензор примет диагональный вид. Найдем компоненты T^{ii}, предположив, что ось x выбрана в направлении полей и, следовательно,

$$E_x = E, \quad E_y = E_z = 0, \quad B_x = \pm B, \quad B_y = B_z = 0.$$

Тогда согласно (69.17)

$$T^{11} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}(E^2 + B^2) - E^2 - B^2\right\} = -\frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) = -w,$$

$$T^{22} = T^{33} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) = w.$$

Компонента T^{00}, как мы знаем, тоже равна w. Итак, будучи приведен к диагональному виду, тензор энер-

гии-импульса электромагнитного поля выглядит следующим образом:

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}. \qquad (69.20)$$

Если векторы **B** и **E** взаимно перпендикулярны и одинаковы по модулю, тензор $T^{\mu\nu}$ не может быть приведен к диагональному виду (взаимная перпендикулярность не дает возможности преобразовать **B** и **E** так, чтобы они стали коллинеарными, а равенство модулей — так, чтобы одно из полей обратилось в нуль).

Отметим, что в смешанных компонентах тензор (69.20) имеет вид

$$(T^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w \end{pmatrix} \qquad (69.21)$$

Из (69.21) сразу следует, что след тензора T^{μ}_{ν} равен нулю. Этот результат мы получили ранее в общем случае (см. (69.14)).

§ 70. Заряженная частица в электромагнитном поле

Действие для заряженной частицы в электромагнитном поле определяется, как мы знаем, выражением

$$S = \int_1^2 \left(-mc\,ds - \frac{e}{c} \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu\,dx^\mu \right) \qquad (70.1)$$

(см. формулу (66.1)).

Ковариантные компоненты 4-потенциала можно представить в виде

$$A_\mu = (\varphi,\ -\mathbf{A})$$

(см. (60.15)). Компоненты 4-радиуса-вектора равны

$$x^\mu = (ct,\ \mathbf{r}).$$

Следовательно,

$$\sum_{\mu=0}^{3} A_\mu\,dx^\mu = \varphi c\,dt - \mathbf{A}\,d\mathbf{r} = (c\varphi - \mathbf{A}\mathbf{v})\,dt.$$

Подставим это значение суммы в формулу (70.1). Кроме того, заменим ds в соответствии с (34.4) через $c\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt$. В результате получим

$$S=\int_1^2\left(-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi\right)dt.$$

Отсюда заключаем, что функция Лагранжа для заряженной частицы в поле имеет вид

$$L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi. \tag{70.2}$$

Первый член представляет собой функцию Лагранжа для свободной частицы (см. (39.4)). Остальные два члена описывают взаимодействие частицы с полем.

Зная функцию Лагранжа, можно вычислить энергию и импульс частицы. Согласно формулам (4.19) и (5.1) обобщенный импульс определяется выражением

$$\mathbf{P}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}},$$

а энергия — выражением

$$W=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{v}-L. \tag{70.3}$$

Следовательно, продифференцировав функцию (70.2) по $\mathbf{v}$, получим обобщенный импульс частицы:

$$\mathbf{P}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{70.4}$$

Здесь $\mathbf{p}$ — обычный импульс частицы (см. формулу (38.5)). Из полученной нами формулы следует, что обобщенный импульс отличается от обычного слагаемым $(e/c)\mathbf{A}$. В отсутствие поля обобщенный импульс совпадает с обычным.

Теперь определим энергию частицы. В соответствии с (70.3) и (70.2)

$$W=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{v}-L=\mathbf{P}\mathbf{v}-L=\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\mathbf{v}-$$
$$-\left(-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi\right)=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\varphi. \tag{70.5}$$

Первый член полученного выражения представляет собой энергию свободной частицы (см. формулу (38.11)), второй член — дополнительную энергию, которой обладает частица, находясь в поле.

Заменив в выражении для энергии скорость $\mathbf{v}$ через обобщенный импульс $\mathbf{P}$, найдем функцию Гамильтона частицы. Чтобы исключить $\mathbf{v}$ из формул (70.5) и (70.4), представим эти уравнения в виде

$$\frac{W - e\varphi}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Если возвести эти уравнения в квадрат и вычесть из верхнего нижнее, то справа получится m^2c^2. Следовательно, заменив W на $\mathscr{H}$, получим

$$\left(\frac{\mathscr{H} - e\varphi}{c}\right)^2 - \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = m^2c^2, \qquad (70.6)$$

откуда

$$\mathscr{H} = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi. \qquad (70.7)$$

Это и есть функция Гамильтона для частицы в поле.

В § 32 было установлено, что компоненты обобщенного импульса равны производным действия по соответствующим обобщенным координатам (см. формулу (32.6)). В нашем случае роль обобщенных координат играют декартовы координаты x_i. Следовательно,

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial x_i} \quad \text{или} \quad \mathbf{P} = \nabla S.$$

Далее, согласно (32.10) производная действия по времени дает функцию Гамильтона, взятую с обратным знаком:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathscr{H}.$$

Заменив в формуле (70.6) $\mathscr{H}$ на $-\partial S/\partial t$, а $\mathbf{P}$ на ∇S, придем к уравнению Гамильтона — Якоби для частицы в электромагнитном поле:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 - \left(\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - m^2c^2 = 0. \qquad (70.8)$$

В ньютоновском приближении, т. е. при $v \ll c$, функция (70.2) переходит в

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi \tag{70.9}$$

(мы разложили (70.2) по степеням v^2/c^2 и отбросили константу $-mc^2$).

Продифференцировав (70.9) по $\mathbf{v}$, найдем обобщенный импульс

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}, \tag{70.10}$$

где $\mathbf{p}$ — обычный импульс.

Для энергии в этом приближении получается значение

$$W = \mathbf{P}\mathbf{v} - L = \\ = \left(m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\mathbf{v} - \frac{mv^2}{2} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} + e\varphi = \frac{mv^2}{2} + e\varphi. \tag{70.11}$$

Из (70.10)

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right).$$

Подставив это значение $\mathbf{v}$ в (70.11), придем к выражению для функции Гамильтона:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{70.12}$$

Уравнение Гамильтона — Якоби в ньютоновском приближении имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi = 0. \tag{70.13}$$

Глава XIII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 71. Волновое уравнение

В § 57 было показано, что при наложении на потенциалы **A** и φ условия Лоренца

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{71.1}$$

(см. формулу (56.8)) они удовлетворяют уравнению Даламбера [1]):

$$\Box\, \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}, \tag{71.2}$$

$$\Box\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \tag{71.3}$$

(см. уравнения (57.6) и (57.7)). Здесь $\Box$ — оператор Даламбера, равный

$$\Box = \Delta - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{71.4}$$

(см. (57.4)).

В отсутствие зарядов и токов (т. е. при $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$) уравнения для потенциалов приобретают вид:

$$\Box\, \mathbf{A} = 0, \tag{71.5}$$

$$\Box\, \varphi = 0 \tag{71.6}$$

или, с учетом (71.4),

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{71.7}$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{71.8}$$

---

[1]) Напомним, что уравнения (57.6) и (57.7) были получены в предположении, что среда, в которой рассматривается поле, однородна и изотропна и, кроме того, ε и μ не зависят от **E** и **H**.

Аналогичные уравнения получаются также для векторов **E** и **B**:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{71.9}$$

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{71.10}$$

(см. § 74).

Уравнения (71.7)—(71.10) имеют ненулевые решения. Следовательно, электромагнитные поля могут существовать и в отсутствие зарядов. Электромагнитные поля, существующие в отсутствие зарядов, называются *электромагнитными волнами.*

Уравнение вида

$$\Delta f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \tag{71.11}$$

где v — константа, называется *волновым.* Из курса общей физики известно, что v представляет собой фазовую скорость волны. Следовательно, скорость электромагнитных волн равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \tag{71.12}$$

где

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \tag{71.13}$$

есть показатель преломления среды, в которой распространяется волна.

Волновое уравнение легко получить в четырехмерном виде. Сделаем это для поля в вакууме. Согласно (64.2) уравнения Максвелла в отсутствие зарядов и токов имеют вид

$$\sum_{\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{71.14}$$

Подстановка вместо $F^{\mu\nu}$ их значений (61.6) дает

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}\right) = 0$$

или

$$\sum_{\nu} \frac{\partial^2 A^{\nu}}{\partial x_{\mu}\,\partial x^{\nu}} - \sum_{\nu} \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x_{\nu}\partial x^{\nu}} = 0. \tag{71.15}$$

Первую сумму можно записать следующим образом:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial^2 A^{\nu}}{\partial x_{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \sum_{\nu} \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\nu}}.$$

Если 4-потенциал удовлетворяет условию Лоренца (60.18), то $\sum (\partial A^{\nu}/\partial x^{\nu}) = 0$ и в уравнении (71.15) первый член будет отсутствовать. Таким образом, мы приходим к уравнениям

$$\sum_{\nu} \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x_{\nu} \partial x^{\nu}} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \qquad (71.16)$$

Поднятие индекса при ∂x_{ν} равнозначно умножению каждого из слагаемых в (71.16) на $g^{\nu\nu}$ (см. (XII.30)). Поэтому уравнениям (71.16) можно придать вид

$$\sum_{\nu} g^{\nu\nu} \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\nu}} = 0.$$

Наконец, приняв во внимание, что недиагональные компоненты тензора $g^{\nu\rho}$ — нули, можно написать

$$\sum_{\nu, \rho} g^{\nu\rho} \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \qquad (71.17)$$

Уравнения (71.16) и (71.17) представляют собой *волновое уравнение в четырехмерной форме.* Подстановка в них значений $g^{\nu\rho}$ и x^{ν} приводит, как легко убедиться, к уравнениям (71.7) и (71.8).

§ 72. Плоская электромагнитная волна в однородной и изотропной среде

Решение волнового уравнения значительно облегчается, если поле зависит только от одной координаты, скажем, x. Волна в этом случае называется *плоской.* Вместе с тем, на примере плоской волны можно выяснить все характерные особенности электромагнитных волн. По этим причинам мы ограничимся в этой главе рассмотрением только плоских волн.

Будем подразумевать под f любую из компонент векторного потенциала $\mathbf{A}$ либо скалярный потенциал φ

(с равным основанием можно подразумевать под f любую компоненту вектора **E** или вектора **B**). В случае плоской волны функция f зависит только от x и t и, следовательно, является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \qquad (72.1)$$

Это уравнение можно написать в виде

$$Df = 0, \qquad (72.2)$$

где D — дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Представим этот оператор в виде

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{n}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right), \qquad (72.3)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ (см. (71.13)).

Введем новые переменные

$$\xi = t - \frac{x}{c/n}, \quad \eta = t + \frac{x}{c/n}, \qquad (72.4)$$

т. е. заменим x и t по формулам

$$x = \frac{\eta - \xi}{2}\frac{c}{n}, \quad t = \frac{\eta + \xi}{2}. \qquad (72.5)$$

Согласно (72.5)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} = -\frac{c}{2n}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{c}{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{n}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Следовательно, при переходе к переменным ξ и η первый множитель в (72.3) нужно заменить на $-(2n/c)\,\partial/\partial\xi$.

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{c}{2n}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{c}{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

так что второй множитель в (72.3) нужно заменить на $(2n/c)\partial/\partial\eta$. В итоге получим, что

$$D = -\frac{4n^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta} = -\frac{4n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}.$$

Подставим найденное нами значение D в уравнение (72.2), опустив множитель $-4n^2/c^2$. В результате получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0. \qquad (72.6)$$

Очевидным решением этого уравнения является функция, зависящая только от одной переменной ξ или η, т. е. функция $f_1(\xi)$ либо $f_2(\eta)$. Сложив функции f_1 и f_2, получим общее решение уравнения (72.6):

$$f(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta). \qquad (72.7)$$

Мы не стали умножать f_1 на C_1, а f_2 на C_2, поскольку f_1 и f_2 суть произвольные функции соответствующих переменных.

Подставив в (72.7) выражения (72.4) для ξ и η, придем к решению уравнения (72.1):

$$f(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{c/n}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c/n}\right). \qquad (72.8)$$

Первый член в этом выражении представляет собой волну, бегущую со скоростью c/n в направлении оси x. Действительно, значения f_1 одинаковы для всех значений t и x, связанных соотношением

$$t - \frac{x}{c/n} = \text{const} \quad \text{или} \quad x = \frac{c}{n}t - \frac{c}{n}\text{const},$$

откуда и следует, что любое заданное значение функции f_1 перемещается вдоль оси x со скоростью c/n.

Аналогично второй член в выражении (72.8) представляет собой волну, бегущую со скоростью c/n в направлении, противоположном оси x.

Форма волны (72.8), т. е. вид функций f_1 и f_2, является совершенно произвольной.

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в направлении оси x. Выберем потенциалы так, чтобы

$$\varphi = 0, \quad \nabla\mathbf{A} = 0. \qquad (72.9)$$

Такая калибровка потенциалов удовлетворяет условию Лоренца (71.1) и, следовательно, не сказывается на значениях векторов **B** и **E** (см. § 56). При наложении на потенциал φ условия (72.9)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (72.10)$$

(см. (56.3)).

Для рассматриваемой волны все характеризующие поле величины, в том числе и **A**, имеют вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\xi) = \mathbf{A}\left(t - \frac{x}{c/n}\right), \qquad (72.11)$$

так что

$$\frac{\partial A_i}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial A_i}{\partial z} = 0 \qquad (i = x,\ y,\ z).$$

В частности, равны нулю $\partial A_y/\partial y$ и $\partial A_z/\partial z$. Таким образом, второе из условий (72.9) принимает в рассматриваемом случае вид

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0.$$

Подстановка последнего соотношения в уравнение (72.1), написанное для A_x, дает, что

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0.$$

Согласно последнему уравнению

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = \mathrm{const}. \qquad (72.12)$$

Производная $\partial A_x/\partial t$ определяет компоненту поля E_x (см. (72.10)). Поэтому соотношение (72.12) означает, что $E_x = \mathrm{const}$. Таким образом, мы пришли к заключению, что отличная от нуля компонента E_x может быть обусловлена только постоянным и однородным электрическим полем. Такое поле не имеет отношения к электромагнитной волне. Значит, можно считать, что A_x, а следовательно, и E_x равно нулю.

Из (72.11) вытекает, что

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{n}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}. \qquad (72.13)$$

Согласно первой из этих формул

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}. \qquad (72.14)$$

Поскольку $\mathbf{A}$ зависит только от одной координаты x, в выражении $\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}]$ нужно сохранить только компоненту ∇, равную $\mathbf{e}_x(\partial/\partial x)$. Следовательно, можно написать, что

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{A}\right] = \left[\mathbf{e}_x, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right]$$

или, согласно второй из формул (72.13),

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{e}_x, -\frac{n}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}\right].$$

Наконец, приняв во внимание (72.14), получаем

$$\mathbf{B} = n[\mathbf{e}_x, \mathbf{E}] = \sqrt{\varepsilon\mu}\,[\mathbf{e}_x, \mathbf{E}], \qquad (72.15)$$

откуда вытекает, что вектор $\mathbf{B}$ перпендикулярен как к вектору $\mathbf{E}$, так и к оси x. Ранее мы показали, что у рассматриваемой нами волны $E_x = 0$ и, следовательно, вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен к оси x. Таким образом, мы приходим к заключению, что в плоской волне векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ перпендикулярны к направлению распространения волны. Следовательно, электромагнитные волны являются *поперечными*.

В формуле (72.15) $\mathbf{e}_x$ представляет собой орт направления, в котором распространяется волна. Обозначив этот орт символом $\mathbf{k}_0$, придем к формуле

$$\mathbf{B} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,[\mathbf{k}_0, \mathbf{E}], \qquad (72.16)$$

которая не зависит от выбора направлений координатных осей.

Заменив $\mathbf{B}$ через $\mu\mathbf{H}$, получим

$$\sqrt{\mu}\,\mathbf{H} = [\mathbf{k}_0, \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{E}]. \qquad (72.17)$$

Из (72.17) вытекает, что векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ взаимно перпендикулярны, причем их модули связаны соотношением

$$\sqrt{\mu}\,H = \sqrt{\varepsilon}\,E. \qquad (72.18)$$

Кроме того, из (72.17) легко заключить, что векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}_0$ образуют правовинтовую последовательность.

Электромагнитная волна несет с собой энергию, поток которой определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}].$$

Выразим **H** через **E** согласно (72.17) и применим формулу «бац минус цаб» (см. (VI.5)). Тогда

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\mathbf{E}[\mathbf{k}_0\mathbf{E}]] = \\ = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\mathbf{k}_0 - \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\mathbf{E}\mathbf{k}_0)\mathbf{E}.$$

Поскольку векторы **E** и $\mathbf{k}_0$ взаимно перпендикулярны, $\mathbf{E}\mathbf{k}_0 = 0$, так что

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\mathbf{k}_0 = \frac{c}{4\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\varepsilon E^2\mathbf{k}_0.$$

Воспользовавшись соотношением (72.18), можно написать

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\varepsilon E^2\mathbf{k}_0 = \frac{c}{4\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\mu H^2\mathbf{k}_0 = \\ = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{(\varepsilon E^2 + \mu H^2)}{8\pi}\mathbf{k}_0.$$

Наконец, приняв во внимание, что $(\varepsilon E^2 + \mu H^2)/8\pi$ есть плотность энергии волны w, получим

$$\mathbf{S} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}w\mathbf{k}_0 = vw\mathbf{k}_0. \qquad (72.19)$$

В вакууме

$$\mathbf{S} = cw\mathbf{k}_0. \qquad (72.20)$$

Таким образом, плотность потока энергии, переносимой волной, равна плотности энергии, умноженной на скорость распространения волны. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением распространения волны.

Поток импульса определяется максвелловским тензором натяжений, компоненты которого вычисляются по формуле

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left\{E_iD_k + H_iB_k - \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\delta_{ik}\right\}$$

(см. (59.12)). Направим ось x вдоль $\mathbf{k}_0$, ось y вдоль $\mathbf{E}$ и ось z вдоль $\mathbf{H}$ (при этом векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}_0$ будут образовывать правовинтовую последовательность). Тогда $E_y = \pm E$, $E_x = E_z = 0$, $D_y = \pm D$, $D_x = D_z = 0$, $H_z = \pm H$, $H_x = H_y = 0$, $B_z = \pm B$, $B_x = B_y = 0$. Видно, что при таком выборе осей все недиагональные компоненты тензора σ_{ik} будут нулями. Поскольку E_xD_x и H_xB_x равны нулю, получим, что

$$\sigma_{xx} = -\frac{ED + HB}{8\pi} = -w.$$

Так как $E_yD_y = ED$, а $H_yB_y = 0$, то

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{4\pi}\left\{ED - \frac{1}{2}(ED + HB)\right\} = 0$$

(согласно (72.18) $ED = HB$). Аналогично

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{4\pi}\left\{HB - \frac{1}{2}(ED + HB)\right\} = 0.$$

Таким образом, при сделанном нами выборе координатных осей отлична от нуля лишь одна компонента максвелловского тензора натяжений — компонента σ_{xx} —, причем она равна плотности энергии волны w, взятой с обратным знаком. Напомним, что в соответствии с тем, как это принято в подавляющем большинстве руководств по электродинамике, мы определили тензор σ_{ik} так, чтобы он характеризовал поток импульса, не вытекающий из данного объема, а втекающий в этот объем (см. § 59). Это равнозначно изменению направления нормали к площадке на противоположное. Таким образом, поток импульса, переносимого в направлении оси x через перпендикулярную к этой оси площадку df, определяется положительной величиной: $\sigma_{xx}(-df) = w\,df$.

§ 73. Монохроматическая плоская волна

Волна, у которой поле в каждой точке изменяется со временем по гармоническому закону (т. е. по закону косинуса), называется *монохроматической*.

Для монохроматической волны решение уравнения (71.11) имеет вид

$$f = a\cos(\omega t + \psi_1), \tag{73.1}$$

где a — величина, не зависящая от t, ψ_1 — функция от $\mathbf{r}$. В этом случае $\partial^2 f/\partial t^2 = -\omega^2 f$. Подстановка этого значения в (71.11) приводит к уравнению

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{v^2} f = 0, \tag{73.2}$$

которое определяет зависимость f от $\mathbf{r}$.

Введем величину

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{k}_0 = \frac{\omega}{v}\mathbf{k}_0 = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\omega}{c}\mathbf{k}_0, \tag{73.3}$$

называемую *волновым вектором* ($\mathbf{k}_0$ — орт направления, в котором распространяется волна). Тогда уравнение (73.2) можно написать следующим образом:

$$\Delta f + k^2 f = 0. \tag{73.4}$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением плоской монохроматической волны. Выберем ось x в направлении распространения волны. Тогда уравнение (73.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2 f = 0. \tag{73.5}$$

Решением этого уравнения будет функция

$$f = a\cos(\pm kx + \psi_2), \tag{73.6}$$

где a — величина, не зависящая от x, ψ_2 — функция от t.

Выражения (73.1) и (73.6) можно согласовать, положив

$$f = a\cos(\omega t \pm kx + \alpha), \tag{73.7}$$

где a и α — величины, не зависящие ни от t, ни от x. Разные знаки перед kx отвечают разным направлениям распространения волны. Мы будем рассматривать волны, бегущие в направлении возрастания x, в связи с чем будем писать перед kx знак минус.

При произвольном выборе координатных осей формула (73.7) переходит в

$$f = a\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha). \tag{73.8}$$

По такому закону изменяется любая величина, характеризующая монохроматическую плоскую волну, в

частности, и векторный потенциал **A**. Таким образом, имеем

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha). \quad (73.9)$$

Здесь $\mathbf{A}_0$ — амплитуда, ω — частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, α — начальная фаза волны.

Выражение $(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$, которое называют *фазой волны*, есть инвариант. Действительно, тот факт, что поле в данной точке пространства в данный момент времени приняло, например, нулевое значение $(\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = 0)$, не может зависеть от выбора системы отсчета. Отсюда следует, что для двух произвольно выбранных систем отсчета должно выполняться условие

$$\omega t - \mathbf{kr} + \alpha = \omega' t' - \mathbf{k}'\mathbf{r}' + \alpha'.$$

Если положить $t = 0$ и $\mathbf{r} = 0$, то, как вытекает из преобразований Лоренца, будут равны нулю также t' и $\mathbf{r}'$. Следовательно, должно быть $\alpha = \alpha' = \mathrm{inv}$, из чего заключаем, что и величина

$$\Phi = \omega t - \mathbf{kr}, \quad (73.10)$$

которую также называют *фазой*, является инвариантом.

В случае электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме, фаза (73.10) может быть представлена в виде

$$\Phi = \frac{\omega}{c}(ct) - \mathbf{kr} = \frac{\omega}{c} x^0 - \mathbf{kr}. \quad (73.11)$$

Поскольку Φ есть инвариант, из (73.11) следует, что ω/c и $\mathbf{k}$ образуют четырехмерный волновой вектор

$$k^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right). \quad (73.12)$$

Это обстоятельство позволяет найти закон преобразования частоты волны ω при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Согласно первой из формул (36.1)

$$k'^0 = \frac{k^0 - \beta k^1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

откуда после подстановки значений $k^0 = \omega/c$, $k^1 = k_x = (\omega/c)\cos\vartheta$ (ϑ — угол между направлением

распространения волны и осью x), $\beta = v/c$ (v — скорость системы K' относительно системы K) находим, что

$$\omega' = \frac{\omega\,[1 - (v/c)\cos\vartheta]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Из этой формулы при $\vartheta = 0$ получается формула для продольного эффекта Доплера

$$\omega' = \frac{\omega\,(1 - v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

При $\vartheta = \pi/2$ приходим к формуле для поперечного эффекта Доплера

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отметим, что, поскольку модуль волнового вектора есть ω/c, квадрат 4-вектора k^μ равен нулю:

$$\sum_{\mu=0}^{3} k^\mu k_\mu = (k^0)^2 - k^2 = 0.$$

Обратимся снова к выражению (73.9). Его можно представить в виде

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}\{\hat{\mathbf{A}}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]\} = \operatorname{Re}\{\hat{\mathbf{A}}\}, \qquad (73.13)$$

где $\hat{\mathbf{A}}_0$ — постоянный комплексный вектор

$$\hat{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0 \exp(i\alpha), \qquad (73.14)$$

а $\hat{\mathbf{A}}$ — комплексный вектор, стоящий в фигурных скобках (ср. с (16.9) и (16.10)).

Изменение знака при показателе степени выражения вида $\exp(i\varphi)$ не изменяет вещественной части этого выражения. Поэтому формулу (73.13) можно написать следующим образом:

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}\{\hat{\mathbf{A}}_0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]\} = \operatorname{Re}\{\hat{\mathbf{A}}\}. \qquad (73.15)$$

В этом случае под фазой волны нужно понимать выражение, отличающееся от (73.10) знаком. Кроме того, следовало бы изменить знак в аргументе экспоненты (73.14). Однако ввиду произвольности α этого можно не делать.

Выражение (73.15) оказывается в некоторых отношениях удобнее выражения (73.13) и, кроме того,

имеет больше сходства с волновой функцией, описывающей движение свободной частицы в квантовой механике.

Легко убедиться в том, что производя над определяемой формулой (73.15) величиной **A** линейные операции, например дифференцирование, можно осуществлять эти операции над комплексным вектором $\hat{\mathbf{A}}$ и затем брать вещественную часть получившейся величины. Так, например,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t}\right\} = \operatorname{Re}\{-i\omega\hat{\mathbf{A}}\}. \qquad (73.16)$$

Вычислим ротор вектора **A**. Взятие ротора есть линейная операция. Поэтому

$$[\nabla\mathbf{A}] = \operatorname{Re}\{[\nabla\hat{\mathbf{A}}]\} = \operatorname{Re}\{[\nabla,\ \hat{\mathbf{A}}_0 \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t))]\} = \\ = \operatorname{Re}\{\nabla \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t)),\ \hat{\mathbf{A}}_0\}. \qquad (73.17)$$

Поскольку $\mathbf{kr} = \sum k_j x_j$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\exp(i(\mathbf{kr} - \omega t)) = ik_j \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t)).$$

Следовательно,

$$\nabla \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t)) = i \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t)) \sum_j \mathbf{e}_j k_j = \\ = i\mathbf{k} \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t)).$$

Подставив это значение градиента в (73.17), получим

$$[\nabla\mathbf{A}] = \operatorname{Re}\{[i\mathbf{k} \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t)),\ \hat{\mathbf{A}}_0]\} = \\ = \operatorname{Re}\{[i\mathbf{k},\ \hat{\mathbf{A}}_0 \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t))]\} = \operatorname{Re}\{i[\mathbf{k}\hat{\mathbf{A}}]\}. \qquad (73.18)$$

Теперь мы можем написать выражения для полей **E** и **B**:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \operatorname{Re}\left\{i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{A}}\right\}, \qquad (73.19)$$

$$\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}] = \operatorname{Re}\{i[\mathbf{k}\hat{\mathbf{A}}]\} \qquad (73.20)$$

(если бы мы исходили из выражения (73.13), в последних двух формулах появился бы знак минус). Из сравнения этих двух выражений заключаем, что векторы **B** и **E** колеблются в одинаковой фазе.

Приняв во внимание, что $\mathbf{k} = (\omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c)\,\mathbf{k}_0$, формулу (73.20) можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \mathrm{Re}\left\{i\left[\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\omega}{c}\,\mathbf{k}_0,\ \hat{\mathbf{A}}\right]\right\} = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\mathbf{k}_0,\ i\,\frac{\omega}{c}\,\hat{\mathbf{A}}\right]\right\}.$$

Второй множитель в векторном произведении есть $\hat{\mathbf{E}}$ (см. (73.19)). Таким образом, для вектора $\hat{\mathbf{B}}$, вещественная часть которого дает $\mathbf{B}$, получается соотношение

$$\mathbf{B} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,[\mathbf{k}_0\hat{\mathbf{E}}]. \qquad (73.21)$$

Введя обозначение $i(\omega/c)\,\hat{\mathbf{A}}_0 = \hat{\mathbf{E}}_0$, выражение (73.19) можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{\hat{\mathbf{E}}_0 \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t))\}. \qquad (73.22)$$

Если ось x направить вдоль вектора $\mathbf{k}$, то вектор $\mathbf{E}$, а значит, и $\hat{\mathbf{E}}_0$ будут лежать в плоскости yz. Поэтому $\hat{\mathbf{E}}_0$ можно представить как линейную комбинацию ортов $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{E}_0 = \xi\mathbf{e}_y + \eta\mathbf{e}_z,$$

где ξ и η — комплексные числа.

Покажем, что при надлежащем выборе α последнее выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = (E_{y0}\mathbf{e}_y + E_{z0}\mathbf{e}_z)\exp(-i\alpha), \qquad (73.23)$$

где E_{y0} и E_{z0} — вещественные величины. Для этого напишем для квадрата вектора $\hat{\mathbf{E}}_0$, который, вообще говоря, является комплексным числом, выражение

$$\hat{\mathbf{E}}_0^2 = \text{вещественное число} \cdot \exp(-2i\alpha).$$

Представим вещественное число в виде квадрата некоторой векторной величины. Этой величиной может быть не только вещественный вектор, но также и комплексный вектор $\mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ при условии, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны. Действительно, в случае, когда $\mathbf{ab} = 0$,

$$(\mathbf{a} + i\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2i\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \text{вещественное число}.$$

Таким образом, мы получили выражение

$$\hat{\mathbf{E}}_0^2 = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})^2 \exp(-2i\alpha),$$

откуда

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \exp(-i\alpha) \qquad (\mathbf{a} \perp \mathbf{b}).$$

Направив ось y вдоль вектора $\mathbf{a}$, а ось z — вдоль вектора $\mathbf{b}$, придем к формуле (73.23).

Подставим выражение (73.23) в формулу (73.22):

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{(E_{y0}\mathbf{e}_y + iE_{z0}\mathbf{e}_z) \exp(-i(\omega t - kx + \alpha))\}$$

(при выбранных нами направлениях осей $\mathbf{kr} = kx$). Отсюда

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad E_z = E_{z0} \sin(\omega t - kx + \alpha). \tag{73.24}$$

Из этих формул следует, что

$$\frac{E_y^2}{E_{y0}^2} + \frac{E_z^2}{E_{z0}^2} = 1. \tag{73.25}$$

Все рассуждения и формулы, начиная с (73.22), справедливы и для вектора $\mathbf{B}$.

Полученный нами результат означает, что вектор $\mathbf{E}$ вращается в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, описывая своим концом эллипс (аналогично ведет себя и вектор $\mathbf{B}$). Направление вращения зависит от того, какие (одинаковые или разные) знаки имеют E_{y0} и E_{z0} в формулах (73.24). Такая волна называется *эллиптически-поляризованной*. При $E_{y0} = \pm E_{z0}$ эллипс (73.25) превращается в окружность. В этом случае волна *поляризована по кругу*. Наконец, может случиться, что одна из величин E_{y0} и E_{z0} равна нулю. Тогда вектор $\mathbf{E}$ (а также и $\mathbf{B}$) направлен все время вдоль одной и той же прямой. Волна в этом случае называется *линейно-поляризованной* или *плоско-поляризованной*.

Итак, монохроматическая волна обязательно поляризована (эллиптически, по кругу или линейно). Это означает, что колебания в волне упорядочены тем или иным способом.

§ 74. Плоская монохроматическая волна в проводящей среде

Уравнения (71.7) и (71.8) были получены в предположении, что в среде отсутствуют избыточные свободные заряды ($\rho = 0$) и токи проводимости ($\mathbf{j} = 0$). В предыдущем параграфе мы установили, что в случае плоской монохроматической волны решением уравнения (71.7) является функция (73.9) с постоянной амплитудой. Независимость амплитуды от координат означает, что распространение плоской волны в диэлектрике не сопровождается изменением ее интенсивности.

Теперь допустим, что среда обладает электропроводностью σ, так что в ней могут возникать токи проводимости $\mathbf{j}$, равные $\sigma\mathbf{E}$. Избыточные свободные заряды будем по-прежнему считать отсутствующими ($\rho = 0$). При сделанных нами предположениях уравнения Максвелла (55.10) и (55.11) запишутся следующим образом:

$$[\nabla\mathbf{E}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\mathbf{B} = 0; \qquad (74.1)$$

$$[\nabla\mathbf{B}] = \frac{4\pi\mu}{c}\sigma\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \nabla\mathbf{E} = 0 \qquad (74.2)$$

(мы заменили $\mathbf{j}$ через $\sigma\mathbf{E}$).

Возьмем ротор от первого из уравнений (74.1):

$$[\nabla[\nabla\mathbf{E}]] = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\mathbf{B}]. \qquad (74.3)$$

Согласно (XI.45) $[\nabla[\nabla\mathbf{E}]] = \nabla(\nabla\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}$. Но $\nabla\mathbf{E} = 0$, так что остается только второй член, равный $-\Delta\mathbf{E}$. Заменим им левую часть уравнения (74.3). Кроме того, подставим в правую часть этого уравнения значение $[\nabla\mathbf{B}]$ из (74.2). В результате получим

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Напишем это уравнение следующим образом:

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0. \qquad (74.4)$$

Уравнение (74.4) называется обобщенным волновым уравнением. Оно отличается от уравнения (71.9) дополнительным слагаемым, содержащим первую

производную искомой функции по времени. При $\sigma=0$ это слагаемое исчезает и уравнение (74.4) переходит в (71.9).

Считая волну монохроматической, будем искать решение уравнения в виде

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\{\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\} = \operatorname{Re}\{\hat{\mathbf{E}}\}, \qquad (74.5)$$

где $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ — комплексная векторная функция от $\mathbf{r}$, $\hat{\mathbf{E}}$ — функция, стоящая в фигурных скобках. Дифференцирование функции (74.5) по t дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \operatorname{Re}\{-i\omega\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\} = \operatorname{Re}\{-i\omega\hat{\mathbf{E}}\}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \operatorname{Re}\{-\omega^2\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\} = \operatorname{Re}\{-\omega^2\hat{\mathbf{E}}\}. \end{aligned} \qquad (74.6)$$

Подстановка в уравнение (74.4) значений (74.5) и (74.6) приводит после сокращения на общий множитель $\exp(-i\omega t)$ к следующему дифференциальному уравнению для $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$:

$$\Delta\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0. \qquad (74.7)$$

Умножим числитель и знаменатель в третьем слагаемом на $\varepsilon\omega$ и заменим $\varepsilon\mu\omega^2/c^2$ через k^2 (см. (73.3)). В результате, объединив второе и третье слагаемые, получим уравнение

$$\Delta\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + k^2\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}\right)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0. \qquad (74.8)$$

При $\sigma = 0$ это уравнение переходит в уравнение вида (73.5).

Представим коэффициент при $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ в уравнении (74.8) в виде квадрата комплексного волнового числа $\hat{k} = k_1 + ik_2$:

$$k^2\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}\right) = (k_1 + ik_2)^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2ik_1k_2.$$

Приравняв вещественные и мнимые части, придем к системе двух уравнений для k_1 и k_2:

$$k_1^2 - k_2^2 = k^2, \quad 2k_1k_2 = 4\pi\sigma k^2/\varepsilon\omega. \qquad (74.9)$$

Решение этой системы имеет вид

$$k_1 = k\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+(4\pi\sigma/\varepsilon\omega)^2}}{2}},$$
$$k_2 = k\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+(4\pi\sigma/\varepsilon\omega)^2}}{2}}. \qquad (74.10)$$

В случае, если $(4\pi\sigma/\varepsilon\omega)^2 \ll 1$ (т. е. при малой σ и большой ω), формулы (74.10) сильно упрощаются: величину k_1 можно принять равной k, а в выражении для k_2 положить $\sqrt{1+(4\pi\sigma/\varepsilon\omega)^2} \approx 1+(1/2)(4\pi\sigma/\varepsilon\omega)^2$, в результате чего для k_2 получится значение $2\pi\sigma k/\varepsilon\omega$. Таким образом, при малой проводимости и большой частоте

$$\hat{k} = k + i2\pi\sigma k/\varepsilon\omega. \qquad (74.11)$$

Итак, уравнение (74.7) можно представить в виде

$$\Delta\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \hat{k}^2\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0, \qquad (74.12)$$

где $\hat{k} = k_1 + ik_2$ — комплексная величина, вещественная и мнимая части которой определяются формулами (74.10).

Рассмотрим плоскую волну. Ось x выберем в направлении распространения волны. Тогда $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ будет зависеть только от x и уравнение (74.12) упростится следующим образом:

$$\frac{\partial^2\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \hat{k}^2\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0.$$

Решением этого уравнения будет функция

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}}_0 \exp(\pm i\hat{k}x), \qquad (74.13)$$

где $\hat{\mathbf{E}}_0$ — постоянный комплексный вектор. Знаки плюс и минус соответствуют разным направлениям распространения волны. Нас будут интересовать волны, бегущие в направлении оси x. Поэтому мы возьмем в экспоненте знак «+» (зависящий от t множитель мы написали в виде $\exp(-i\omega t)$).

Подставив найденное нами решение (74.13) в (74.5), получим следующее выражение для $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\{\hat{\mathbf{E}}_0 \exp(i\hat{k}x)\exp(-i\omega t)\}.$$

Представим в этой формуле комплексный вектор $\hat{\mathbf{E}}_0$ в виде $\mathbf{E}_0 \exp(-i\alpha)$, где $\mathbf{E}_0$ — вещественный постоянный вектор. Кроме того, выразим комплексное число $\hat{k}$ через его вещественную и мнимую части ($\hat{k} = k_1 + ik_2$). В результате получим

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_0 \exp(-i\alpha) \exp(i(k_1 + ik_2)x) \exp(-i\omega t)\}.$$

Запишем это выражение следующим образом:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_0 \exp(-k_2 x) \exp(-i(\omega t - k_1 x + \alpha))\}. \qquad (74.14)$$

Взяв вещественную часть выражения в фигурных скобках, получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-k_2 x) \cos(\omega t - k_1 x + \alpha). \qquad (74.15)$$

Выражение (74.15) описывает волну, амплитуда которой убывает по закону $\exp(-k_2 x)$. Фазовая скорость этой волны равна

$$v = \frac{\omega}{k_1}. \qquad (74.16)$$

Таким образом, вещественная часть комплексного волнового числа $\hat{k}$ определяет фазовую скорость волны, а мнимая часть — затухание волны.

Согласно (74.10) при малом затухании $k_1 \approx k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$, а коэффициент затухания

$$k_2 \approx \frac{2\pi\sigma k}{\varepsilon\omega} = \frac{2\pi\sigma}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \qquad (74.17)$$

Получим решение уравнения (74.7) еще одним способом. Представим это уравнение в виде

$$\Delta\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \frac{(\varepsilon + i4\pi\sigma/\omega)\mu\omega^2}{c^2}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0.$$

Если ввести комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}, \qquad (74.18)$$

можно написать

$$\Delta\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \frac{\hat{\varepsilon}\mu}{c^2}\omega^2\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0.$$

Умножим это уравнение на $\exp(-i\omega t)$ и примем во внимание, что $\omega^2\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) = -\partial^2\hat{\mathbf{E}}/\partial t^2$, где

$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ (см. (74.6)). В итоге придем к уравнению

$$\Delta\hat{\mathbf{E}} - \frac{\hat{\varepsilon}\mu}{c^2}\frac{\partial^2\hat{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0, \qquad (74.19)$$

отличающемуся от уравнения (71.9) лишь тем, что напряженность электрического поля и диэлектрическая проницаемость являются не вещественными, а комплексными. Поле $\mathbf{E}$ представляет собой вещественную часть решения уравнения (74.19).

Решение уравнения (71.9) мы нашли в предыдущем параграфе, оно имеет вид

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_0 \exp(-i(\omega t - kx + \alpha))\} = \operatorname{Re}\{\hat{\mathbf{E}}\},$$

где $k = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega/c$ (волна предполагается бегущей в направлении оси x). Следовательно, при вещественной ε решением уравнения (74.19) является функция

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp(-i(\omega t - kx + \alpha)). \qquad (74.20)$$

Замена вещественной ε комплексной не изменяет вида решения. Однако вещественное волновое число k должно быть заменено в ней комплексным числом, определяемым по формуле

$$\hat{k} = k_1 + ik_2 = \sqrt{\hat{\varepsilon}\mu}\,\omega/c, \qquad (74.21)$$

где $\hat{\varepsilon}$ — величина из (74.18). Подстановка в формулу (74.20) вместо k комплексного числа $\hat{k} = k_1 + ik_2$ приводит к выражению, совпадающему с (74.15).

С учетом (74.18) квадрат комплексного числа (74.21) равен

$$\hat{k}^2 = \hat{\varepsilon}\mu\omega^2/c^2 = \left(\varepsilon + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mu\omega^2/c^2 =$$

$$= \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} + i\,\frac{4\pi\sigma\varepsilon\mu}{\varepsilon\omega}\,\frac{\omega^2}{c^2} = k^2\left(1 + i\,\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}\right).$$

Это значение совпадает с $\hat{k}^2$, стоящим в формуле (74.8).

Таким образом, в случае проводящей среды и волновое число, и диэлектрическая проницаемость становится комплексными. Комплексным будет также показатель преломления $\hat{n} = \sqrt{\hat{\varepsilon}\mu}$. Запишем его в виде

$$\hat{n} = n + i\varkappa = \sqrt{\hat{\varepsilon}\mu} = \sqrt{(\varepsilon + i4\pi\sigma/\omega)\,\mu}. \qquad (74.22)$$

Возведем это соотношение в квадрат:

$$(n + i\varkappa)^2 = n^2 - \varkappa^2 + 2in\varkappa = (\varepsilon + i4\pi\sigma/\omega)\,\mu = \\ = \varepsilon\mu + i4\pi\sigma\varepsilon\mu/\omega\varepsilon.$$

Приравняем вещественные и мнимые части:

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon\mu, \quad 2n\varkappa = 4\pi\sigma\varepsilon\mu/\varepsilon\omega.$$

Получившаяся система уравнений тождественна с системой (74.9). Поэтому ее решения можно найти, заменив в формулах (74.10) k^2 через $\varepsilon\mu$. В результате получим

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+(4\pi\sigma/\varepsilon\omega)^2}}{2}}, \\ \varkappa &= \sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{(1+(4\pi\sigma/\varepsilon\omega)^2}}{2}}. \end{aligned} \tag{74.23}$$

Сопоставление формул (74.10) и (74.23) дает, что

$$k_1 = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,n = \frac{\omega}{c}\,n, \quad k_2 = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\varkappa = \frac{\omega}{c}\,\varkappa \tag{74.24}$$

(k мы определили как $\omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c$).

Подставив значение (74.24) для k_1 в формулу (74.16), придем к соотношению

$$v = \frac{c}{n},$$

из которого следует, что вещественная часть комплексного показателя преломления $\hat{n}$ есть обычный показатель преломления среды n. Вторая из формул (74.24) показывает, что мнимая часть $\hat{n}$ пропорциональна коэффициенту затухания волны ($\varkappa \propto k_2$).

До сих пор мы говорили об электрическом поле волны. Магнитное поле можно получить из соотношения (73.21), подставив в него комплексное значение диэлектрической проницаемости и комплексную функцию $\hat{\mathbf{E}}$. Согласно (74.14)

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp(-k_2 x) \exp(-i(\omega t - k_1 x + \alpha)).$$

Следовательно,

$$\hat{\mathbf{B}} = \sqrt{\hat{\varepsilon}\mu}\,[\mathbf{k}_0,\ \mathbf{E}_0 \exp(-k_2 x) \exp(-i(\omega t - k_1 x + \alpha))].$$

Комплексное число $\sqrt{\hat{\varepsilon}\mu}$ можно представить в виде

$$\sqrt{\hat{\varepsilon}\mu} = n + i\varkappa = \sqrt{n^2 + \varkappa^2}\exp(i\psi).$$

где $\psi = \operatorname{arctg}(\varkappa/n)$. Воспользовавшись этим, можно написать формулу

$$\hat{\mathbf{B}} = \sqrt{n^2 + \varkappa^2}\,[\mathbf{k}_0, \mathbf{E}_0\exp(-k_2x)\exp(-i(\omega t - k_1x + \alpha - \psi))]$$

из которой видно, что колебания векторов **B** и **E** происходят не в одинаковой фазе (как это было в диэлектрике), а с разностью фаз ψ, определяемой выражением

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\varkappa}{n}. \tag{74.25}$$

Соотношение между амплитудами электрического и магнитного полей определяется формулой

$$B_0 = \sqrt{n^2 + \varkappa^2}\,E_0,$$

которая после подстановки значений (74.23) для n и $\varkappa$ принимает вид

$$B_0 = E_0\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1 + (4\pi\sigma/\varepsilon\omega)^2} \tag{74.26}$$

(ср. с (73.21)).

§ 75. Немонохроматические волны[1])

Всякую немонохроматическую волну можно представить как суперпозицию монохроматических волн различных частот. Эта операция называется *спектральным разложением волны.*

Если поле волны описывается строго периодической функцией, оно может быть разложено в ряд Фурье. В этом случае спектральное разложение содержит частоты, образующие дискретный ряд значений: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ Частоты ω_n $(n \neq 0)$ являются целыми кратными основной частоты ω_0, т. е. $\omega_n = n\omega_0$. Основная частота определяется периодом T функции, описывающей поле: $\omega_0 = 2\pi/T$.

Рассмотрим плоскую немонохроматическую волну, распространяющуюся в вакууме в положительном на-

---

[1]) Прежде чем приступить к чтению этого параграфа, следует ознакомиться с Приложением XIV.

правлении оси x. Любая величина, характеризующая такую волну (**E**, **B** и т. д.), описывается функцией

$$f = f(t - x/c) \tag{75.1}$$

(см. (72.8)). Зафиксировав x, мы получим функцию от t, описывающую колебания поля в данной точке. По предположению эта функция является строго периодической. Пусть период ее равен T:

$$f(t+T) = f(t).$$

Согласно (XIV. 11) $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(-in\omega_0 t), \tag{75.2}$$

где C_n — константа, вычисляемая по формуле

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \exp(in\omega_0 t)\, dt$$

(см. (XIV. 14)).

Согласно формуле (XIV. 15) разложение функции $f(t)$ можно представить также в виде

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^* \exp(in\omega_0 t). \tag{75.3}$$

Средняя интенсивность волны пропорциональна среднему значению квадрата **E** или **B**, т. е. пропорциональна выражению

$$\langle [f(t)]^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(-in\omega_0 t) \right) \times \\ \times \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m^* \exp(im\omega_0 t) \right) dt. \tag{75.4}$$

Подынтегральное выражение равно $[f(t)]^2$. Один из множителей мы взяли в виде (75.2), второй — в виде (75.3), причем во второй сумме немой индекс обозначили буквой m вместо n.

Преобразуем выражение (75.4) следующим образом:

$$\langle [f(t)]^2 \rangle =$$
$$= \sum_{n,\, m=-\infty}^{+\infty} C_n C_m^* \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \exp\left(i(m-n)\omega_0 t\right) dt =$$
$$= \sum_{n,\, m=-\infty}^{+\infty} C_n C_m^* \delta_{nm} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n C_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 =$$
$$= C_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \qquad (75.5)$$

(мы воспользовались ортогональностью системы функций $\exp(in\omega_0 t)$; см. (XIV. 13)).

Полученный нами результат означает, что средняя интенсивность немонохроматической волны слагается из интенсивностей монохроматических компонент.

Теперь рассмотрим случай, когда волна, а следовательно, и колебание $f(t)$ существуют в течение ограниченного промежутка времени (а не от $t = -\infty$ до $t = +\infty$). В этом случае $f(t)$ не является периодической и может быть разложена не в ряд, а в интеграл Фурье, содержащий непрерывный ряд различных частот. Согласно (XIV. 22)

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega, \qquad (75.6)$$

где C_ω — функция частоты ω, определяемая выражением[1])

$$C_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp(i\omega\xi)\, d\xi \qquad (75.7)$$

(см. (XIV. 21)). Очевидно, что

$$C_{-\omega} = C_\omega^*. \qquad (75.8)$$

---

[1]) Обычно в формуле (75.7) переменную интегрирования обозначают буквой t. Мы обозначили ее другой буквой, чтобы подчернуть, что C_ω есть величина, не зависящая от t.

Полная интенсивность волны за время от $-\infty$ до $+\infty$ определяется выражением

$$I_{\Sigma}=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,f(t)\,dt.$$

Замена одного из сомножителей выражением (75.6) дает

$$I_{\Sigma}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}C_{\omega}\exp(-i\omega t)\,d\omega\right\}dt.$$

В полученной нами формуле предполагается интегрирование сначала по ω, затем по t. Изменим порядок интегрирования, т. е. напишем

$$I_{\Sigma}=\int_{\infty}^{+\infty}C_{\omega}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\exp(-i\omega t)\,dt\right\}d\omega.$$

Сравнение с (75.7) показывает, что интеграл, стоящий внутри фигурных скобок, представляет собой $C_{-\omega}$, т. е. C_{ω}^{*}. Следовательно,

$$I_{\Sigma}=\int_{-\infty}^{+\infty}C_{\omega}C_{\omega}^{*}\,d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}|C_{\omega}|^2\,d\omega=2\int_{0}^{\infty}|C_{\omega}|^2\,d\omega. \qquad (75.9)$$

Из полученной нами формулы вытекает, что величина $|C_{\omega}|^2$ характеризует долю полной интенсивности, приходящуюся на единичный интервал частот.

В качестве примера поля, которое может быть разложено в интеграл Фурье, можно привести излучение заряда, испытывающего торможение.

Глава XIV

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 76. Запаздывающие потенциалы

В предыдущей главе мы предполагали, что заряды и токи отсутствуют, в связи с чем правую часть в уравнениях Даламбера (71.2) и (71.3) полагали равной нулю. Теперь займемся изучением переменных полей при наличии произвольно движущихся зарядов. В этом случае потенциалы поля удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \qquad (76.1)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \qquad (76.2)$$

Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общие решения однородных уравнений были исследованы в предыдущей главе. Поэтому, чтобы получить общее решение уравнений (71.1) и (71.2), достаточно найти их частные решения.

Разделим все пространство, в котором имеются заряды и токи, на элементарные объемы dV' и определим поле, создаваемое каждым из зарядов de, заключенных в данном dV'. Вследствие линейности уравнений искомое поле будет суперпозицией полей создаваемых всеми зарядами de.

Заряд de, заключенный в данном элементарном объеме dV', есть, вообще говоря, функция времени: $de = de(t)$. Если отвлечься от наличия других зарядов de, то плотность заряда, обусловленную рассматриваемым точечным зарядом, можно представить

в виде

$$\rho'(\mathbf{r}, t) = de(t)\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{76.3}$$

где $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор, определяющий положение заряда $de(t)$. Мы обозначили эту плотность символом ρ', чтобы отличить ее от плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$, определяющей $de(t)$ по формуле $de(t) = \rho(\mathbf{r}, t)\,dV'$.

Подстановка выражения (76.3) в уравнение (71.3) дает

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\,de(t)\,\delta(\mathbf{R}), \tag{76.4}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}$.

Во всех точках, кроме той, для которой $\mathbf{R} = 0$, плотность $\rho' = 0$ и уравнение (76.4) имеет вид

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{76.5}$$

Очевидно, что в этом случае поле обладает центральной симметрией относительно точки $\mathbf{R} = 0$ и, следовательно, является функцией лишь R. Поэтому напишем уравнение (76.5) в сферической системе координат. Воспользовавшись выражением (XI. 88) для оператора Лапласа, получим

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{76.6}$$

Будем искать решение в виде

$$\varphi = \psi(R, t)/R. \tag{76.7}$$

При этом условии

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -\frac{\psi}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R},$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(-\psi + R\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) =$$

$$= -\frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{\partial\psi}{\partial R} + R\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} = R\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}.$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\psi}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Подстановка этих значений в уравнение (76.6) приводит после сокращения на $1/R$ к уравнению [1])

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Как было установлено в § 72, общее решение такого уравнения имеет вид

$$\psi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right) \tag{76.8}$$

(см. формулу (72.8); в рассматриваемом нами сейчас случае $n = 1$).

Первое слагаемое в (76.8) описывает расходящуюся сферическую волну, второе слагаемое описывает сферическую волну, сходящуюся к точке $R = 0$. Нас интересует частное решение. Возьмем в качестве такого решения первый член формулы (76.8). Подставив его в (76.7), найдем выражение для φ:

$$\varphi(\mathbf{r},\ t) = \frac{f(t - R/c)}{R}. \tag{76.9}$$

Решение (76.9) удовлетворяет уравнению (76.5) при произвольном выборе функции $f(t - R/c)$. Попытаемся выбрать эту функцию так, чтобы выражение (76.9) удовлетворяло уравнению (76.4) и в точке $\mathbf{R} = 0$. Заметим, что при $R \to 0$ функция (76.9) стремится к бесконечности. Следовательно, ее производная по координатам становится для малых R очень большой, так что членом $(1/c^2)(\partial^2\varphi/\partial t^2)$ можно пренебречь по сравнению с $\Delta\varphi$ и написать уравнение (76.4) в виде

$$\Delta\varphi = -4\pi de(t)\,\delta(\mathbf{R}).$$

Мы пришли к уравнению Пуассона (42.4) для потенциала точечного заряда. Таким образом, вблизи точки $\mathbf{R} = 0$ функция (76.9) должна переходить в выражение вида $\varphi = e/R$. Это будет иметь место, если положить $f(t - R/c) = de(t - R/c)$. Итак, искомое решение имеет вид

$$\varphi = \frac{de(t - R/c)}{R}. \tag{76.10}$$

[1]) Напомним, что точка, для которой $R = 0$, пока исключена из рассмотрения.

Очевидно, что в непосредственной близости к точке $\mathbf{R}=0$ это выражение переходит в

$$\varphi \approx \frac{de(t)}{R}.$$

Чтобы найти потенциал для произвольного распределения зарядов, описываемого функцией $\rho(\mathbf{r}, t)$, просуммируем решение (76.10) по всем $de = \rho\, dV'$. Тогда получим

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (76.11)$$

Уравнение (76.2) отличается от (76.1) лишь тем, что в правой части вместо функции ρ стоит $\mathbf{j}/c$. Поэтому можно сразу по аналогии с (76.11) написать выражение для $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (76.12)$$

Выражения (76.11) и (76.12) называются *запаздывающими* потенциалами. Название обусловлено тем, что значения потенциалов в момент времени t определяются значениями ρ и $\mathbf{j}$ в более ранние моменты времени, опережающие t на время запаздывания $\tau = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$, необходимое для того, чтобы электромагнитное возмущение дошло от точки $\mathbf{r}'$ в точку $\mathbf{r}$.

Чтобы получить общее решение уравнений (76.1) и (76.2), нужно к запаздывающим потенциалам прибавить общие решения однородных уравнений, которые были найдены в предыдущей главе. Эти решения не связаны с полем, возбуждаемым системой. Они описывают внешнее поле, действующее на систему и накладывающееся на поле, создаваемое системой.

В стационарном случае (т. е. в случае, когда ρ и $\mathbf{j}$ не изменяются со временем) формулы (76.11) и (76.12) переходят соответственно в выражения (41.10) и (48.7).

Отметим, что, выбрав в качестве частного решения функцию f_2 (см. (76.8)), мы получили бы вместо запаздывающих опережающие потенциалы. Подробнее на этом мы останавливаться не будем.

§ 77. Поле равномерно движущегося заряда

Пусть заряд e движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ относительно системы отсчета K. Свяжем с зарядом систему отсчета K'. Эта система, как и заряд, движется относительно системы K со скоростью $\mathbf{v}$.

Относительно системы K' заряд покоится. Следовательно, потенциалы поля в этой системе равны

$$\varphi(\mathbf{r}', t') = \frac{e}{r'}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}', t') = 0. \tag{77.1}$$

Самым общим решением было бы $\mathbf{A} = \text{const}$, но в силу калибровочной инвариантности эту константу можно положить равной нулю.

Чтобы найти потенциал в системе K, осуществим преобразование 4-вектора

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$$

к системе K. Для этого нужно взять формулы обратного преобразования (36.2), согласно которым

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\varphi(\mathbf{r}', t') + \beta A_x(\mathbf{r}', t')}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\varphi(\mathbf{r}', t')}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$A_x(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta\varphi(\mathbf{r}', t') + A_x(\mathbf{r}', t')}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta\varphi(\mathbf{r}', t')}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$A_y = A'_y = 0, \quad A_z = A'_z = 0.$$

Подставив в эти формулы значение (77.1) для φ, получим

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{r'\sqrt{1-\beta^2}}, \\ A_x(\mathbf{r}, t) &= \frac{(v/c)\, e}{r'\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{77.2}$$

Поскольку отлична от нуля лишь компонента A_x, а вектор $\mathbf{v}$ направлен по оси x, выражение для векторного потенциала можно записать так:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{cr'\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{77.3}$$

Теперь нужно перейти в формулах (77.2) и (77.3) от штрихованных координат (т. е. от r') к нештрихо-

ванным. Согласно преобразованиям Лоренца (35.14)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Следовательно,

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\left[(x - vt)/\sqrt{1-\beta^2}\right]^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}. \quad (77.4)$$

Подстановка в (77.2) и (77.3) дает

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}}, \quad (77.5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{c\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}}. \quad (77.6)$$

Сравнение (77.5) с (77.6) показывает, что между потенциалами имеется соотношение

$$\mathbf{A} = \frac{\varphi \mathbf{v}}{c}. \quad (77.7)$$

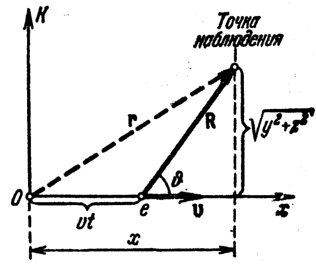


Рис. 77.1

Формулы (77.5) и (77.6) можно упростить, выразив их через длину вектора $\mathbf{R}$, проведенного от заряда в точку наблюдения, и угол ϑ между направлением этого вектора и осью x. Если отсчет времени начать с момента, когда заряд был в начале координат, то, как видно из рис. 77.1,

$$R^2 = (x - vt)^2 + y^2 + z^2.$$

Поэтому согласно (77.4)

$$r' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\sqrt{R^2 - \beta^2(y^2+z^2)} = \frac{R}{\sqrt{1-\beta^2}}\sqrt{1 - \beta^2\frac{y^2+z^2}{R^2}}.$$

Отношение $(y^2+z^2)/R^2$ равно $\sin^2\vartheta$ (см. рис. 77.1). Следовательно,

$$r' = \frac{R}{\sqrt{1-\beta^2}}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\vartheta}.$$

Подставив это значение в (77.2) и (77.3), получим:

$$\varphi = \frac{e}{R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\vartheta}}, \tag{77.8}$$

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cR\sqrt{1-\beta^2\sin^2\vartheta}}. \tag{77.9}$$

Зная потенциалы, можно по формулам:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \tag{77.10}$$

$$\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}] \tag{77.11}$$

(см. (56.3) и (56.1)) вычислить поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Записав (77.10) в компонентах, получим

$$E_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}.$$

Следовательно,

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v\varphi}{c}\right) =$$

$$= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{77.12}$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{77.13}$$

Согласно (77.5) и (77.6) φ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковый вид

$$\psi(\mathbf{r},\ t) = \frac{a}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}},$$

где a — константа (скалярная или векторная). Обозначив $x - vt = \xi$, можно написать, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}(-v),$$

откуда заключаем, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -v\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{77.14}$$

Заменив в (77.12) $\partial\varphi/\partial t$ согласно (77.14), придем к формуле

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1-\beta^2). \tag{77.15}$$

Подстановка производных по координатам от выражения (77.5) в формулы (77.15) и (77.13) дает

$$\begin{aligned} E_x &= (1-\beta^2)\frac{e(x-vt)}{[(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}}, \\ E_y &= (1-\beta^2)\frac{ey}{[(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}}, \\ E_z &= (1-\beta^2)\frac{ez}{[(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}}. \end{aligned} \tag{77.16}$$

Эти формулы можно записать в векторном виде

$$\mathbf{E} = (1-\beta^2)\frac{e\mathbf{R}}{R^3(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}, \tag{77.17}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из точки, где находится заряд, в точку наблюдения (см. рис. 77.1).

Для модуля $\mathbf{E}$ имеем

$$E = \frac{e(1-\beta^2)}{R^2(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}. \tag{77.18}$$

Из этой формулы вытекает, что на оси, вдоль которой движется заряд (т. е. при $\vartheta = 0$ и π),

$$E = \frac{e(1-\beta^2)}{R^2}, \tag{77.19}$$

а в направлениях, перпендикулярных к скорости заряда (т. е. при $\vartheta = \pi/2$),

$$E = \frac{e}{R^2\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{77.20}$$

Поле как бы сплющивается в направлении движения заряда, причем тем сильнее, чем больше v.

Найдем магнитное поле. Согласно (77.11) и (77.7)

$$\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}] = \left[\nabla, \frac{\mathbf{v}\varphi}{c}\right] = \frac{1}{c}[\nabla\varphi, \mathbf{v}] = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}, \nabla\varphi] \tag{77.21}$$

(напомним, что $\mathbf{v}$ — константа).

В соответствии с (77.10)

$$-\nabla\varphi = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\varphi\mathbf{v})}{\partial t} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (77.22)$$

(мы приняли во внимание соотношение (77.7), а также то обстоятельство, что скорость не зависит от t).

Подставим выражение (77.22) для $-\nabla\varphi$ в (77.21):

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{E}] + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v},\ \frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right].$$

Второй член является векторным произведением коллинеарных векторов и, следовательно, равен нулю. Таким образом,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{E}]. \quad (77.23)$$

Мы видим, что вектор $\mathbf{B}$ в каждой точке перпендикулярен как к вектору $\mathbf{v}$, так и к вектору $\mathbf{E}$. На оси x векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{E}$ коллинеарны. Следовательно, на этой оси $\mathbf{B} = 0$.

Если в формулу (77.23) подставить выражение (77.17) для $\mathbf{E}$, получается

$$\mathbf{B} = (1-\beta^2)\frac{e}{c}\frac{[\mathbf{v}\mathbf{R}]}{R^3(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}. \quad (77.24)$$

При $v \ll c$ (77.24) переходит в формулу

$$\mathbf{B} = \frac{e}{c}\frac{[\mathbf{v}\mathbf{R}]}{R^3}. \quad (77.25)$$

Заметим, что выражения (77.17) и (77.25) можно получить с помощью формул преобразования полей (62.2), исходя из того, что в системе K' $\mathbf{E}' = e\mathbf{r}'/r'^3$, $\mathbf{B}' = 0$. Рекомендуем сделать это в порядке упражнения.

§ 78. Поле заряда, движущегося произвольно

Найдем поле заряда, движущегося с ускорением. Пусть движение происходит по траектории $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ (рис. 78.1). Вычислим поле в точке наблюдения P, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Вследствие запаздывания потенциалы в точке P в момент t будут определяться положением и скоростью заряда не в тот же момент времени t, а в более ранний момент t_0.

Момент t_0 должен удовлетворять условию

$$c\tau = c(t - t_0) = R(t_0), \tag{78.1}$$

где $R(t_0)$ — расстояние от точки, в которой находится заряд в момент t_0, до точки наблюдения P. Запаздывание определяется временем τ, которое требуется для того, чтобы возмущение дошло от точки $\mathbf{r}_0(t_0)$ до точки P.

Легко видеть, что $c\tau$ и вектор $\mathbf{R}(t_0)$ образуют 4-вектор

$$R^\mu = (c\tau, \mathbf{R}). \tag{78.2}$$

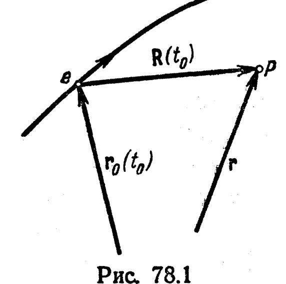


Рис. 78.1

Действительно, 4-векторы

$$x^\mu = \{ct, \mathbf{r}\} \text{ и } x_0^\mu = \{ct_0, \mathbf{r}_0(t_0)\}$$

суть два 4-радиуса-вектора. Вектор (78.2) равен разности этих двух 4-векторов и, следовательно, сам является 4-вектором.

Из (78.1) вытекает, что квадрат 4-вектора (78.2) равен нулю

$$\sum R^\mu R_\mu = c^2\tau^2 - R^2 = 0 \tag{78.3}$$

(это выражение есть по существу квадрат интервала между событиями возникновения сигнала в одной точке и прихода его в другую точку).

Свяжем с зарядом систему отсчета K'. В этой системе заряд покоится и, следовательно, потенциалы определяются выражениями

$$\varphi'(\mathbf{r}', t') = \frac{e}{R'} = \frac{e}{c\tau'}, \quad \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t') = 0, \tag{78.4}$$

где $\mathbf{r}'$ и t' — место и время наблюдения, определенные в системе K', R' — расстояние между точкой, в которой находится заряд, и точкой наблюдения. Таким образом, 4-потенциал поля в системе K' имеет вид

$$A'^\mu = \left(\frac{e}{c\tau'}, 0\right). \tag{78.5}$$

Попытаемся найти такое выражение для 4-потенциала, которое при $\mathbf{v} = 0$ обращалось бы в выражение (78.5). Очевидно, что в произвольно взятой системе отсчета потенциалы должны зависеть от

скорости заряда **v**. Поскольку мы ищем четырехмерное выражение потенциала, скорость нужно взять в виде 4-скорости

$$u^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \ \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Если положить 4-потенциал пропорциональным 4-скорости, то при $\mathbf{v} = 0$ векторный потенциал **A** также будет равен нулю. Далее, в знаменателе временно́й компоненты 4-потенциала (78.5) стоит временна́я компонента 4-вектора (78.2). Следовательно, в знаменатель искомого выражения для A^μ следует ввести 4-вектор R^μ, причем для того чтобы получилась правильная размерность, его нужно умножить на 4-скорость (в числитель мы уже ввели 4-скорость).

Таким образом, 4-потенциал нужно определить следующим образом:

$$A^\mu = \frac{eu^\mu}{\sum\limits_\nu R^\nu u_\nu}. \tag{78.6}$$

Подстановка значений R^ν и u_ν дает, что

$$\sum_\nu R^\nu u_\nu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c^2\tau - \mathbf{Rv}).$$

Следовательно, выражение (78.6) можно записать в виде

$$A^\mu = \sqrt{1 - v^2/c^2} \, \frac{eu^\mu}{c^2\tau - \mathbf{Rv}},$$

откуда

$$A^\mu = \left(\frac{ec}{c^2\tau - \mathbf{Rv}}, \ \frac{e\mathbf{v}}{c^2\tau - \mathbf{Rv}} \right). \tag{78.7}$$

Нетрудно заметить, что при $\mathbf{v} = 0$ выражение (78.7) действительно переходит в (78.5).

Приняв во внимание, что $c\tau = R$, запишем выражения потенциалов следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})_{t_0}}, \tag{78.8}$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{e\boldsymbol{\beta}_{t_0}}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})_{t_0}} = \varphi\boldsymbol{\beta} \tag{78.9}$$

(мы применили обозначение $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$).

Выражения (78.8) и (78.9) называются *потенциалами Лиенара — Вихерта*. Чтобы получить значения потенциалов в момент времени t, значения $\mathbf{v}$ и $\mathbf{R}$ в правых частях (78.8) и (78.9) нужно брать в момент t_0, определяемый условием

$$t_0 = t - \tau = t - \frac{R(t_0)}{c} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)|}{c}.$$

Запишем это условие в виде

$$F(x, y, z, t, t_0) = t - t_0 - \frac{\{[x - x_0(t_0)]^2 + [y - y_0(t_0)]^2 + [z - z_0(t_0)]^2\}^{1/2}}{c} = 0. \tag{78.10}$$

Правые части выражений (78.8) и (78.9) суть функции от t_0, которое в свою очередь есть функция от x, y, z и t (x, y, z — координаты точки наблюдения)

$$t_0 = f(x, y, z, t). \tag{78.11}$$

Соотношение (78.10) представляет собой неявное выражение функциональной зависимости (78.11).

При нахождении полей по формулам

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}]$$

надо вычислять выражения вида $\partial\varphi/\partial x_i$, $\partial\mathbf{A}/\partial t$ и $\partial A_k/\partial x_i$, где x_i — координата точки наблюдения. Поскольку функции φ и $\mathbf{A}$ зависят от x, y, z, t сложным образом — через $t_0 = f(x, y, z, t)$, вычисления придется производить по следующей схеме:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{\partial x_i}, \tag{78.12}$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{\partial t}, \tag{78.13}$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_k}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{\partial x_i}. \tag{78.14}$$

Из соотношения (78.12) вытекает, что

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t_0}\nabla t_0. \tag{78.15}$$

Таким образом, нам понадобятся значения производных $\partial t_0/\partial x_i$ и $\partial t_0/\partial t$, которые можно найти с помощью соотношения (78.10). Запишем это соотношение в виде

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t,\ t_0) = t - t_0 - \frac{\left\{\sum [x_i - x_{0i}(t_0)]^2\right\}^{1/2}}{c} = t - t_0 - \frac{\{R^2\}^{1/2}}{c} = 0. \quad (78.16)$$

По правилам дифференцирования неявной функции

$$\frac{\partial t_0}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial t_0}.$$

Продифференцировав (78.16) по t_0, получим

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = -1 + \frac{\sum (x_i - x_{0i})(\partial x_{0i}/\partial t_0)}{cR}.$$

Приняв во внимание, что $x_i - x_{0i} = R_i$, а $\partial x_{0i}/\partial t_0$ есть i-я компонента скорости заряда в момент t_0, придем к выражению

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = -1 + \frac{\mathbf{Rv}(t_0)}{cR} = -\frac{R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}}{R}. \quad (78.17)$$

Аналогичные вычисления дают

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{R_i}{cR}. \quad (78.18)$$

Разделив (78.18) на (78.17) и изменив знак на обратный, получим

$$\frac{\partial t_0}{\partial x_i} = -\frac{R_i}{c(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})},$$

откуда следует, что

$$\nabla t_0 = -\frac{\mathbf{R}}{c(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})}. \quad (78.19)$$

Теперь найдем $\partial t_0/\partial t$. По правилу дифференцирования неявной функции

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = -\frac{\partial F/\partial t}{\partial F/\partial t_0}.$$

Производная функции F (см. (78.16)) по t равна единице: $\partial F/\partial t = 1$. Производная $\partial F/\partial t_0$ определяется

выражением (78.17). Следовательно,

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{R}{R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}}. \tag{78.20}$$

Приступим к вычислению значений $\partial\varphi/\partial t_0$ и $\partial\mathbf{A}/\partial t_0$. Согласно (78.8)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_0} = -\frac{e}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^2}\left(\frac{\partial R}{\partial t_0} - \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t_0}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{R}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_0}\right).$$

Из соотношений $R = c(t - t_0)$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)$ вытекает, что

$$\frac{\partial R}{\partial t_0} = -c, \quad \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t_0} = -\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial t_0} = -\mathbf{v}(t_0).$$

Кроме того, $\partial\boldsymbol{\beta}/\partial t_0 = \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\mathbf{v}}/c$, где $\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение заряда в момент t_0. Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_0} = -\frac{e(-c + \mathbf{v}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}})}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^2} = \frac{ec(1 - \beta^2 + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}}/c)}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^2}. \tag{78.21}$$

Согласно (78.9)

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial t_0}\boldsymbol{\beta} + \varphi\dot{\boldsymbol{\beta}}.$$

Подстановка выражения (78.21) для $\partial\varphi/\partial t_0$ и (78.8) для φ дает

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t_0} = \frac{ec\boldsymbol{\beta}(1 - \beta^2 + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}}/c)}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^2} + \frac{e\dot{\boldsymbol{\beta}}}{R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}} =$$

$$= ce\frac{\boldsymbol{\beta}(1 - \beta^2 + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}}/c) + (\dot{\boldsymbol{\beta}}/c)(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^2}. \tag{78.22}$$

Наконец, мы получили возможность написать выражение для $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}\nabla t_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{\partial t}$$

(см. формулы (78.15) и (78.13)). Подстановка сюда выражений (78.21), (78.19), (78.22) и (78.20) дает

$$\mathbf{E} = -\frac{ec(1 - \beta^2 + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}}/c)}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^2}\left[-\frac{\mathbf{R}}{c(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})}\right] -$$

$$- e\frac{\boldsymbol{\beta}(1 - \beta^2 + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}}/c) + (\dot{\boldsymbol{\beta}}/c)(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^2}\cdot\frac{R}{R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}} =$$

$$= e\frac{\mathbf{R}(1 - \beta^2 + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}}/c) - R\boldsymbol{\beta}(1 - \beta^2 + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}}/c) - (R\dot{\boldsymbol{\beta}}/c)(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^3}. \tag{78.23}$$

Сгруппировав вместе члены, содержащие ускорение заряда $\dot{\mathbf{v}}$ (т. е. $\dot{\boldsymbol{\beta}}$), можно привести выражение для $\mathbf{E}$ к виду

$$\mathbf{E}=e\frac{(\mathbf{R}-R\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{(R-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^3}+e\frac{(\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}}/c)(\mathbf{R}-R\boldsymbol{\beta})-(R\dot{\boldsymbol{\beta}}/c)(R-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta})}{(R-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^3}.$$

Числитель второго слагаемого можно представить в виде двойного векторного произведения $[\mathbf{R}[(\mathbf{R}-R\boldsymbol{\beta}),\dot{\boldsymbol{\beta}}/c]]$, в этом можно убедиться, раскрыв это произведение по формуле «бац минус цаб» (см. (VI.5)). В результате получим окончательное выражение

$$\mathbf{E}=e\frac{(\mathbf{R}-R\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{(R-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^3}+e\frac{[\mathbf{R}[(\mathbf{R}-R\boldsymbol{\beta}),\dot{\boldsymbol{\beta}}/c]]}{(R-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^3}. \tag{78.24}$$

Напомним, что значения $\mathbf{R}$, $\boldsymbol{\beta}$ (т. е. $\mathbf{v}$) и $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ (т. е. $\dot{\mathbf{v}}$) в это формуле должны быть взяты в момент времени $t_0=t-\tau$.

Поле, описываемое выражением (78.24), состоит из двух частей. Первая зависит только от скорости заряда и на больших расстояниях убывает как $1/R^2$ (т. е. как кулоновское поле). Вторая часть зависит, кроме скорости заряда, также и от его ускорения и на больших расстояниях убывает как $1/R$ (т. е. как напряженность поля в сферической электромагнитной волне).

Если заряд движется равномерно, второе слагаемое в формуле (78.24) обращается в нуль и поле определяется следующим выражением:

$$\mathbf{E}=e\frac{(\mathbf{R}_0-R_0\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{(R_0-\mathbf{R}_0\boldsymbol{\beta})^3}. \tag{78.25}$$

Здесь индекс «0» при $\mathbf{R}$ подчеркивает то обстоятельство, что значение $\mathbf{R}$ берется в момент времени t_0, при $\boldsymbol{\beta}$ индекс «0» мы не поставили, поскольку при равномерном движении $\boldsymbol{\beta}$ не зависит от t.

В § 77 мы получили для поля равномерно движущегося заряда формулу (77.17), которую можно записать в виде

$$\mathbf{E}=e\frac{\mathbf{R}(1-\beta^2)}{R^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}. \tag{78.26}$$

Внешне формулы (78.25) и (78.26) сильно отличаются друг от друга. Однако легко показать, что на самом

деле они тождественны. Дело в том, что в формуле (78.25) поле выражено через расстояние от заряда до точки наблюдения, взятое в момент времени $t_0 = t - \tau$. В формуле же (78.26) поле выражено через расстояние от заряда до точки наблюдения, взятое в момент наблюдения t.

Чтобы доказать тождественность формул (78.25) и (78.26), обратимся к рис. 78.2. Расстояние OP есть

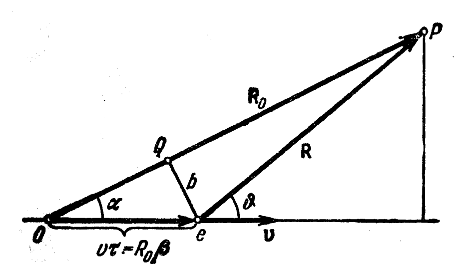


Рис. 78.2

R_0, eP равно R, отрезок Oe есть путь, проходимый зарядом за время запаздывания τ. Приняв во внимание, что $\tau = R_0/c$, этот путь можно представить в виде $R_0\boldsymbol{\beta}$.

Векторы $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}$ и $R_0\boldsymbol{\beta}$ связаны соотношением $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - R_0\boldsymbol{\beta}$, из которого следует тождественность числителей формул (78.25) и (78.26).

Длина отрезка OQ равна проекции вектора $R_0\boldsymbol{\beta}$ на направление вектора $\mathbf{R}_0$

$$OQ = R_0\beta\cos\alpha = \mathbf{R}_0\boldsymbol{\beta}.$$

Следовательно,

$$QP = R_0 - \mathbf{R}_0\boldsymbol{\beta} \qquad (78.27)$$

(ср. со знаменателем формулы (78.25)).

Выразим отрезок QP через R. Из рис. 78.2 видно, что

$$(QP)^2 = R^2 - b^2 = R^2 - (R_0\beta\sin\alpha)^2.$$

Далее, опять-таки из рисунка следует, что $R_0 \sin\alpha = R\sin\vartheta$, так что

$$(QP)^2 = R^2 - (R\beta\sin\vartheta)^2,$$

откуда

$$QP = R\sqrt{1 - \beta^2\sin^2\vartheta}. \qquad (78.28)$$

Наконец, приравняв правые части выражений (78.27) и (78.28), придем к соотношению

$$R_0 - \mathbf{R}_0\boldsymbol{\beta} = R\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\vartheta},$$

из которого следует тождественность знаменателей формул (78.25) и (78.26). Таким образом, мы показали тождественность выражений (78.25) и (78.26).

Перейдем к нахождению поля $\mathbf{B}$. Согласно формуле (XI. 56)

$$\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}] = \left[\nabla t_0, \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t_0}\right]$$

($\mathbf{A}$ зависит от координат через t_0, подобно тому как в формуле (XI. 56) $\mathbf{a}$ зависит от координат через ξ).

Подставив выражения (78.19) и (78.22), получим

$$\mathbf{B} = \left[-\frac{\mathbf{R}}{c(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})},\ ce\frac{\boldsymbol{\beta}(1 - \beta^2 + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}}/c) + (\dot{\boldsymbol{\beta}}/c)(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^2}\right] =$$
$$= \left[\frac{\mathbf{R}}{R},\ e\frac{-R\boldsymbol{\beta}(1 - \beta^2 + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\beta}}/c) - (R\dot{\boldsymbol{\beta}}/c)(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})}{(R - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta})^3}\right].$$

Добавим в числителе второго сомножителя слагаемое $\mathbf{R}(1 - \beta^2 + \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}/c)$. От этого выражение не изменится, так как $[\mathbf{R}\mathbf{R}] = 0$. Однако второй сомножитель при этом превратится в $\mathbf{E}$ (см. (78.23)). Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\mathbf{R}}{R},\ \mathbf{E}\right]. \qquad (78.29)$$

Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t_0)$. Из (78.29) вытекает, что вектор $\mathbf{B}$ в каждой точке перпендикулярен к вектору $\mathbf{E}$ и к вектору, проведенному из точки, в которой находился заряд в момент t_0, в точку наблюдения.

§ 79. Поле, создаваемое системой зарядов на больших расстояниях

Пусть имеется система движущихся зарядов, не выходящих при своем движении за пределы некоторого объема. Систему будем предполагать в целом нейтральной. Рассмотрим поле, создаваемое такой системой на расстояниях, больших по сравнению с ее размерами. Поместим начало координат внутри системы. Распределение заряда охарактеризуем с по-

мощью функции $\rho = \rho(\mathbf{r}', t)$. Тогда заряд, заключенный внутри объема dV', расположенного в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}'$, будет равен $de(t) = \rho(\mathbf{r}', t)\,dV'$. Радиус-вектор точки наблюдения P обозначим через $\mathbf{r}$. Кроме того, введем обозначение $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Очевидно, что $\mathbf{R}$ есть вектор, проведенный из de в точку P.

Напишем выражения (76.11) и (76.12) для запаздывающих потенциалов поля, создаваемого системой,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)\,dV'}{R}, \qquad (79.1)$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)\,dV'}{R}. \qquad (79.2)$$

По предположению $r \gg r'$. Поэтому величину $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ можно рассматривать как значение функции $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}| = r$ в точке $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, где $\delta\mathbf{r} = -\mathbf{r}'$. Воспользовавшись формулой $f(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r})\,\delta\mathbf{r}$, можно написать

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r + \nabla r(-\mathbf{r}') = r - \frac{\mathbf{r}}{r}\mathbf{r}' = r - \mathbf{n}\mathbf{r}', \qquad (79.3)$$

где $\mathbf{n}$ есть орт радиуса-вектора $\mathbf{r}$.

Подстановка значения (79.3) в формулы для потенциалов дает

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dV'}{r - \mathbf{n}\mathbf{r}'}, \qquad (79.4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dV'}{r - \mathbf{n}\mathbf{r}'}. \qquad (79.5)$$

Мы видим, что время запаздывания τ слагается из двух частей. Одна из них, равная $\tau_0 = r/c$, не зависит от $\mathbf{r}'$ и называется временем запаздывания системы. Она определяет время, которое требуется для того, чтобы электромагнитное возмущение прошло путь от начала координат до точки наблюдения. Вторая часть, равная $\tau' = -\mathbf{n}\mathbf{r}'/c$, называется *собственным запаздыванием*. Она характеризует время, необходимое для распространения возмущения в пределах системы.

Разложим подынтегральное выражение в (79.4) в ряд по степеням отношения $\mathbf{r}'/r$. Рассматривая

величину $-\mathbf{nr}'$ как малое приращение δr аргумента r, получим

$$\frac{\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{r-\mathbf{nr}'}{c}\right)}{r-\mathbf{nr}'}=\frac{\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{r}{c}\right)}{r}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right](-\mathbf{nr}')+\ldots \qquad (79.6)$$

Для выяснения вопроса о том, можно ли ограничиться в разложении написанными членами, нужно произвести оценку последующих членов. В эти члены будут входить старшие производные ρ по r. Легко заметить, что производные ρ по r пропорциональны производным ρ по t. Действительно, положив $t-r/c=\xi$, можно написать

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\left(-\frac{1}{c}\right), \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial\xi},$$

откуда

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}. \qquad (79.7)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2}=\left(-\frac{1}{c}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^m\rho}{\partial r^m}=\left(-\frac{1}{c}\right)^m\frac{\partial^m\rho}{\partial t^m}.$$

Последовательное дифференцирование функции ρ/r по r с последующей заменой производных по r производными по t дает

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r}\right)=-\frac{\rho}{r^2}+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)=\frac{2\rho}{r^3}-\frac{2}{r^2}\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{c}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial^m}{\partial r^m}\left(\frac{\rho}{r}\right)=\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{c}\right)^m\frac{\partial^m\rho}{\partial t^m}$$

(в последней строке мы выписали только последнее слагаемое).

При больших r первые члены в написанных нами производных много меньше последних. Поэтому наша

задача сводится к оценке относительной величины выражений вида

$$\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{c}\right)^m \frac{\partial^m \rho}{\partial t^m}(-\mathbf{nr}')^m = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{c}\right)^m \frac{\partial^m \rho}{\partial t^m}(\mathbf{nr}')^m \qquad (79.8)$$

(в разложении (79.6) m-я производная умножается на $(\delta r)^m$).

Допустим, что ρ изменяется со временем по гармоническому закону $\rho \propto \cos \omega t$. Тогда m-я производная ρ по t будет порядка $\omega^m \rho$. Подстановка в (79.8) дает

$$\frac{\rho}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^m (\mathbf{nr}')^m \sim \frac{\rho}{r}\left(\frac{\omega l}{c}\right)^m,$$

где l — линейные размеры рассматриваемой системы зарядов.

Следующий член разложения будет порядка

$$\frac{\rho}{r}\left(\frac{\omega l}{c}\right)^{m+1}.$$

Таким образом, отношение последовательных членов разложения (79.6) по порядку величины равно $\omega l/c$. Заменив частоту периодом изменений ρ (по формуле $\omega = 2\pi/T$), получим

$$\omega l/c = 2\pi l/cT \sim l/cT.$$

Из сказанного вытекает, что последующими членами в разложении (79.6) можно пренебречь, если выполняется условие

$$l/cT \ll 1. \qquad (79.9)$$

Отношение l/c определяет собственное запаздывание τ'. Следовательно, условию (79.9) можно придать вид

$$\tau' \ll T. \qquad (79.10)$$

Из (79.10) следует, что ограничиться первыми членами разложения (79.6) можно в том случае, когда время, необходимое для распространения электромагнитного возмущения в пределах системы, много меньше времени, за которое распределение зарядов в системе меняется заметным образом.

Условие (79.9) можно написать еще двумя способами. Произведение cT дает длину волны λ

излучения, возбуждаемого системой. Поэтому соотношению (79.9) можно придать вид

$$l \ll \lambda \qquad (79.11)$$

(размеры системы должны быть много меньше длины волны).

Наконец, приняв во внимание, что l/T по порядку величины равно скорости v движения зарядов в системе, можно вместо выражения (79.9) написать

$$v \ll c. \qquad (79.12)$$

Из последнего соотношения видно, что, оборвав разложение (79.6) на втором члене, мы ограничиваемся рассмотрением излучения нерелятивистской системы зарядов.

Обратимся снова к вычислению потенциалов, полагая условия (79.10)—(79.12) выполненными. Подстановка (79.6) в (79.4) дает

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r}\int \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' - \\ - \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\int \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \mathbf{n}\mathbf{r}'\, dV'\right\} \qquad (79.13)$$

(напомним, что интегрирование производится по штрихованным координатам, поэтому r можно вынести за знак интеграла; кроме того, мы изменили порядок дифференцирования по r и интегрирования).

Под знаком первого интеграла стоит плотность заряда в момент времени $t-(r/c)$. Следовательно, этот интеграл дает суммарный заряд системы, который ввиду предполагаемой электронейтральности системы равен нулю. Таким образом, в формуле (79.13) нужно сохранить только второй член. Вынеся в нем $\mathbf{n}$ за знак интеграла и производной, придем к выражению

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\int \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \mathbf{r}'\, dV'\right\}.$$

Интеграл в этом выражении есть не что иное, как дипольный электрический момент, которым обладала система в момент $t - r/c$,

$$\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \int \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \mathbf{r}'\, dV'$$

(ср. с (43.6)). Поэтому можно написать

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r}. \tag{79.14}$$

Наконец, осуществив дифференцирование и приняв во внимание, что $\partial\mathbf{p}/\partial r = -(1/c)\partial\mathbf{p}/\partial t = -(1/c)\dot{\mathbf{p}}$ (ср. с (79.7)), получим

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{np}(t - r/c)}{r^2} + \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr}.$$

Первый член в этой формуле совпадает с потенциалом (43.9) статического диполя ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$). Отметим, что отвечающее этому члену поле на расстоянии r в момент t определяется значением дипольного момента в момент $t - r/c$. Первый член убывает с расстоянием r гораздо быстрее, чем второй член. Поэтому, рассматривая поле на больших расстояниях, можно положить

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr}. \tag{79.15}$$

Перейдем к определению векторного потенциала. Формула (79.2) отличается от (79.1) лишь тем, что вместо $\rho(\mathbf{r}', t - R/c)$ под знаком интеграла стоит $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)$. Поэтому, разложив подынтегральную функцию в ряд, получим выражение, аналогичное (79.13),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr}\int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' - \\ - \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{cr}\int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right)(\mathbf{nr}')\, dV'\right\}. \tag{79.16}$$

Если бы токи были стационарными, т. е. не зависели от t, то первый интеграл был бы равен нулю (см. (51.5)). Однако для нестационарных токов этот интеграл отличен от нуля. Поэтому в разложении (79.16) можно сохранить лишь первый член[1]). Таким образом, можно положить

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr}\int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV'.$$

---

[1]) В формуле (79.13) мы не могли пренебречь вторым членом, поскольку первый был равен нулю.

Докажем, что $\int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c)\,dV'$ равен производной по времени от дипольного момента системы, взятой в момент $t - r/c$. Доказательство проще всего осуществить, перейдя от непрерывного распределения зарядов к прерывному. Произведем замену

$$\int \mathbf{j}\,dV' = \int \rho\mathbf{v}\,dV' \to \sum e_a \mathbf{v}_a$$

(скорости зарядов, как и функцию $\rho\mathbf{v}$, нужно взять в момент $t - r/c$). Однако

$$\sum e_a \mathbf{v}_a = \sum e_a \dot{\mathbf{r}}'_a = \frac{d}{dt}\sum e_a \mathbf{r}'_a = \dot{\mathbf{p}}(t - r/c).$$

Таким образом,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr}. \tag{79.17}$$

Сравнение с (79.15) позволяет написать

$$\varphi = \mathbf{A}\mathbf{n}. \tag{79.18}$$

Потенциалы (79.15) и (79.17) определяются значением производной по времени от дипольного момента системы. Поэтому они называются потенциалами, вычисленными в дипольном приближении. Дипольное приближение допустимо при соблюдении условий (79.10)—(79.12).

§ 80. Дипольное излучение

Область поля, отстоящая от излучающей системы на расстояние r, много большее не только размеров системы l, но и длины волны излучения ($r \gg \lambda \gg l$), называется *волновой зоной*.

В волновой зоне выполняются условия, при которых справедливо дипольное приближение, рассмотренное в предыдущем параграфе. В этом приближении

$$\varphi = \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr}, \quad \mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr} \tag{80.1}$$

(см. (79.15) и (79.17)).

Чтобы вычислить $\mathbf{E}$, нужно найти $\nabla\varphi$ и $\partial\mathbf{A}/\partial t$. Применив формулу (XI.51), получим

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\nabla r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{n}$$

(напомним, что $\mathbf{n}=\mathbf{e}_r=\mathbf{r}/r$). Следовательно,

$$\nabla\varphi=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr}\right)\mathbf{n}=-\frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}}}{cr^2}\mathbf{n}-\frac{\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}}{c^2r}\mathbf{n} \qquad (80.2)$$

(мы воспользовались тем обстоятельством, что $\partial\dot{\mathbf{p}}/\partial r=-(1/c)\partial\dot{\mathbf{p}}/\partial t$).

Первый член в полученном нами выражении убывает с расстоянием гораздо быстрее, чем второй. Поэтому на больших расстояниях им можно пренебречь и считать, что

$$\nabla\varphi=-\frac{\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{c^2r}\mathbf{n}.$$

Производная $\partial\mathbf{A}/\partial t=\ddot{\mathbf{p}}/cr$. Таким образом,

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\frac{(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}})\mathbf{n}}{c^2r}-\frac{1}{c}\frac{\ddot{\mathbf{p}}}{cr}=\frac{(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}})\mathbf{n}-\ddot{\mathbf{p}}}{c^2r}.$$

Числитель этого выражения можно представить в виде $[\mathbf{n}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}]]$. В этом легко убедиться, раскрыв двойное векторное произведение по формуле «бац минус цаб» и приняв во внимание, что $\mathbf{nn}=1$. Итак, электрическое поле определяется формулой

$$\mathbf{E}=\frac{1}{c^2r}[\mathbf{n}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}]]=\frac{1}{c^2r}[[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{n}]\mathbf{n}].$$

Перейдем к вычислению магнитного поля. Векторный потенциал является функцией от r. Поэтому согласно (XI.56)

$$\mathbf{B}=[\nabla\mathbf{A}]=\left[\nabla r,\ \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial r}\right]=\left[\mathbf{n},\ \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial r}\right]. \qquad (80.3)$$

Дифференцирование выражения (80.1) для $\mathbf{A}$ дает

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr}\right)=-\frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr^2}-\frac{\ddot{\mathbf{p}}}{c^2r}$$

(ср. с (80.2)). Отбросив член, пропорциональный $1/r^2$, получим, что $\partial\mathbf{A}/\partial r=-\ddot{\mathbf{p}}/c^2r$. Таким образом,

$$\mathbf{B}=-\frac{1}{c^2r}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}]=\frac{1}{c^2r}[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{n}].$$

Напишем окончательные выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{E}=\frac{1}{c^2r}[[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{n}]\mathbf{n}],\quad \mathbf{B}=\frac{1}{c^2r}[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{n}] \qquad (80.4)$$

(напомним, что значения $\ddot{\mathbf{p}}$ должны быть взяты в момент $t - r/c$). Сопоставление этих выражений приводит к заключению, что

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B}\mathbf{n}], \qquad (80.5)$$

откуда вытекает, что вектор **E** перпендикулярен к вектору **B**. Из выражений (80.4) следует, что векторы **E** и **B** перпендикулярны к вектору **n** (перпендикулярность **E** к **n** следует также и из (80.5)). Таким образом, как и в плоской волне, векторы **B**, **E** и **n** взаимно перпендикулярны (см. формулу (72.16)[1])). Кроме того, векторы **B** и **E**, как и в плоской волне, одинаковы по величине, причем

$$E = B = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}| \sin\vartheta}{c^2 r}, \qquad (80.6)$$

где ϑ — угол между направлениями векторов **p** и **n**.

В том, что для изучаемого нами поля оказались справедливыми соотношения, наблюдаемые для плоской волны, нет ничего удивительного. На расстояниях, больших по сравнению с размерами излучающей системы, волна должна быть сферической. Вместе с тем при условии, что $r \gg \lambda$, небольшие участки сферической волны практически совпадают с плоской волной.

Как следует из (80.4), поля **E** и **B** определяются второй производной от дипольного момента системы. Поэтому рассматриваемое излучение называется *дипольным*.

Диполный момент определяется выражением $\mathbf{p} = \sum e\mathbf{r}'$. Следовательно, $\ddot{\mathbf{p}} = \sum e\ddot{\mathbf{r}}' = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Отсюда вытекает, что заряды излучают электромагнитные волны только в том случае, когда они движутся с ускорением.

Чтобы уяснить себе картину поля на больших расстояниях, введем сферическую систему координат, причем полярный угол ϑ будем отсчитывать от направления вектора $\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)$ (рис. 80.1). Согласно

---

[1]) Умножим соотношение (80.5) слева на **n** и используем формулу «бац минус цаб»:

$$[\mathbf{n}\mathbf{E}] = [\mathbf{n}[\mathbf{B}\mathbf{n}]] = \mathbf{B}(\mathbf{n}\mathbf{n}) - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{B}) = \mathbf{B}.$$

Мы пришли к формуле (72.16) (в пустоте $\sqrt{\varepsilon\mu} = 1$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$).

(80.4) вектор **B** перпендикулярен к плоскости, определяемой векторами $\ddot{\mathbf{p}}$ и **n**. Следовательно, **B** направлен по касательной к «параллели», причем векторы $\ddot{\mathbf{p}}$, **n** и **B** образуют правовинтовую систему.

Из (80.5) следует, что векторы **B**, **n** и **E** образуют правовинтовую систему. Отсюда вытекает, что **E** направлен по касательной к «меридиану», причем на «экваторе» $\ddot{\mathbf{p}}$ и **E** противоположны. Еще раз подчеркнем, что изображенные на рис. 80.1 векторы относятся к разным моментам времени: $\ddot{\mathbf{p}}$ к моменту $t-r/c$, а **B** и **E** — к моменту t. Модуль векторов **B** и **E** пропорционален $\sin\vartheta$ (см. (80.4)). Следовательно, поля имеют наибольшую величину на «экваторе» и обращаются в нуль на «полюсах».

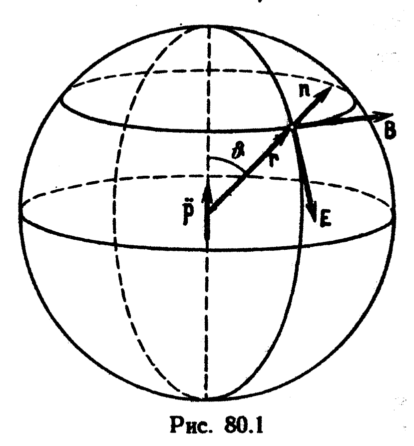


Рис. 80.1

Чтобы определить интенсивность излучения в разных направлениях и общую мощность излучения, вычислим вектор Пойнтинга. Приняв во внимание (80.6), получим

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EB}]=\frac{c}{4\pi}EB\mathbf{n}=\frac{\ddot{\mathbf{p}}^2\sin^2\vartheta}{4\pi c^3r^2}\,\mathbf{n}. \qquad (80.7)$$

Таким образом, интенсивность излучения диполя пропорциональна $\sin^2\vartheta$. Соответствующая диаграмма направленности излучения имеет вид лепестка.

Для определения мощности излучения I найдем поток энергии через всю сферическую поверхность. Площадь сферического пояска угловой ширины $d\vartheta$ равна $2\pi r^2\sin\vartheta d\vartheta$. Следовательно,

$$I=\int\mathbf{S}\,d\mathbf{f}=\int_0^\pi\frac{\ddot{\mathbf{p}}^2\sin^2\vartheta}{4\pi c^3r^2}2\pi r^2\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3}. \qquad (80.8)$$

Пусть из всех зарядов системы ускорением обладает только один. Тогда $\ddot{\mathbf{p}} = \sum e_a \dot{\mathbf{v}}_a = e\dot{\mathbf{v}}$ и мощность излучения равна

$$I = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}. \tag{80.9}$$

Эта формула справедлива и в том случае, когда имеется только один заряд, движущийся с ускорением $\dot{\mathbf{v}}$.

§ 81. Магнитно-дипольное и квадрупольное излучения

Если свойства системы зарядов таковы, что $\ddot{\mathbf{p}} = 0$, дипольное излучение не возникает. Однако это не означает, что излучения нет вообще. В этом случае нужно учесть те члены разложения потенциалов, которыми мы пренебрегли в дипольном приближении.

В предыдущем параграфе было выяснено, что в волновой зоне волна в небольших областях близка к плоской волне, для которой справедливо соотношение (80.5). С помощью этого соотношения, зная **B**, легко найти **E**. Для нахождения же **B** достаточно знать только **A**. Поэтому мы ограничимся нахождением векторного потенциала.

Рассмотрим второй член формулы (79.16), которым мы пренебрегли в дипольном приближении. Поскольку в интересующем нас случае первый член в (79.16) равен нулю, векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{cr}\int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right)(\mathbf{n}\mathbf{r}')\, dV'\right\}.$$

Осуществив дифференцирование по r, мы получим два слагаемых. Одно из них будет пропорционально $1/r^2$, второе пропорционально $1/r$. Первое слагаемое убывает с расстоянием гораздо быстрее, чем второе. Поэтому мы пренебрежем им, как это делали уже неоднократно. Кроме того, мы учтем, что $\partial \mathbf{j}/\partial r = -(1/c)\,\partial \mathbf{j}/\partial t$. В результате получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c)(\mathbf{n}\mathbf{r}')\, dV'.$$

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, перейдем от непрерывного распределения зарядов к дискрет-

ному. Тогда выражение для **A** примет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{c^2 r}\frac{\partial}{\partial t}\sum_a e_a \mathbf{v}_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a). \tag{81.1}$$

Значения $\mathbf{v}_a$ и $\mathbf{r}'_a$ берутся в момент $t-r/c$.

Выражение, стоящее в (81.1) под знаком суммы, можно представить следующим образом:

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a)=\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}'_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a))-\mathbf{r}'_a(\mathbf{n}\mathbf{v}_a). \tag{81.2}$$

Разобьем $\mathbf{v}_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a)$на две равные части и заменим одну из них половиной выражения (81.2):

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a)=\frac{1}{2}\mathbf{v}_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{r}'_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a)\}-\frac{1}{2}\mathbf{r}'_a(\mathbf{n}\mathbf{v}_a).$$

Первый и третий члены можно представить в виде двойного векторного произведения: $^1/_2[\mathbf{n}[\mathbf{v}_a, \mathbf{r}'_a]]$ (в этом можно убедиться с помощью формулы «бац минус цаб»). Таким образом,

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a)=\frac{1}{2}[\mathbf{n}[\mathbf{v}_a\mathbf{r}'_a]]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{r}'_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a)\}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (81.1) дает

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial t}\sum_a e_a[\mathbf{n}[\mathbf{v}_a\mathbf{r}'_a]]+$$
$$+\frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a e_a\mathbf{r}'_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a)=\mathbf{A}_m+\mathbf{A}_Q. \tag{81.3}$$

Смысл индексов m и Q выяснится в дальнейшем.

Вынесем в первом члене **n** за знак суммы и поменяем местами $\mathbf{v}_a$ и $\mathbf{r}'_a$. В результате этот член примет вид

$$\mathbf{A}_m=-\frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{n}\sum_a e_a[\mathbf{r}'_a\mathbf{v}_a]\right]=$$
$$=\frac{1}{cr}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2c}\sum_a e_a[\mathbf{r}'_a\mathbf{v}_a]\,\mathbf{n}\right].$$

Первый множитель есть магнитный момент **m** системы (см. формулу (51.15)). Поэтому можно написать, что

$$\mathbf{A}_m=\frac{1}{cr}[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}], \tag{81.4}$$

где $\dot{\mathbf{m}} = \partial\mathbf{m}/\partial t$ берется в момент времени $t - r/c$. Таким образом, потенциал $\mathbf{A}_m$ определяется изменениями магнитного дипольного момента. Поэтому соответствующее излучение называется магнитно-дипольным.

В случае магнитно-дипольного излучения магнитное поле равно

$$\mathbf{B}_m = [\nabla\mathbf{A}_m] = \left[\nabla r,\ \frac{\partial\mathbf{A}_m}{\partial r}\right] = \left[\mathbf{n},\ \frac{\partial\mathbf{A}_m}{\partial r}\right]$$

(ср. с (80.3)). Если пренебречь в $\partial\mathbf{A}_m/\partial r$ членом, пропорциональным $1/r^2$, и заменить $\partial/\partial r$ на $(-1/c)\partial/\partial t$[1]), получим

$$\mathbf{B}_m = -\frac{1}{c^2 r}[\mathbf{n}[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]] = \frac{1}{c^2 r}[[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}].$$

Воспользовавшись эквивалентным (80.5) соотношением (72.16), получим, что

$$\mathbf{E}_m = -\frac{1}{c^2 r}[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}] = \frac{1}{c^2 r}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}].$$

Итак, поля при магнитно-дипольном излучении равны

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{c^2 r}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}], \qquad \mathbf{B}_m = \frac{1}{c^2 r}[[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]. \tag{81.5}$$

Сравнение полученных результатов с формулами (80.4) для дипольного излучения показывает, что $\mathbf{B}_m$ выражается через $\ddot{\mathbf{m}}$ точно такой формулой, какой $\mathbf{E}$ выражается через $\ddot{\mathbf{p}}$. Формулы для $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{B}$ отличаются, кроме замены $\ddot{\mathbf{p}}$ на $\ddot{\mathbf{m}}$, еще и знаком. Отсюда следует, что картину поля при магнитно-дипольном излучении в волновой зоне можно получить, заменив на рис. 80.1 $\ddot{\mathbf{p}}$ на $\ddot{\mathbf{m}}$, $\mathbf{E}$ на $\mathbf{B}_m$ и $\mathbf{B}$ на $-\mathbf{E}_m$.

Обратимся ко второму члену формулы (81.3), т. е. к выражению

$$\mathbf{A}_Q = \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a e_a\mathbf{r}'_a(\mathbf{n}\mathbf{r}'_a). \tag{81.6}$$

Добавление к $\mathbf{A}_Q$ выражения $f(r)\mathbf{n}$ ($f(r)$ — любая функция от r) не изменит $\mathbf{B}_Q$, так как $[\nabla, f(r)\mathbf{n}] = 0$ (см. (XI.54)). Возьмем в качестве $f(r)$ функцию

$$f(r) = -\frac{1}{6c^2 r}\frac{\partial}{\partial t^2}\sum_a e_a r_a'^2$$

(r_a' есть функция аргумента $(t - r/c)$, которая при воздействии на нее оператора ∇ ведет себя как функция от r). Умножив эту функцию на $\mathbf{n}$ и прибавив ее к (81.6), получим

$$\mathbf{A}_Q = \frac{1}{6c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a e_a\left\{3\mathbf{r}_a'(\mathbf{n}\mathbf{r}_a') - \mathbf{r}_a'^2\mathbf{n}\right\}.$$

Напишем выражение для i-й компоненты вектора $\mathbf{A}_Q$:

$$A_{Qi} = \frac{1}{6c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a e_a\left\{3x_{ai}'\left(\sum_k n_k x_{ak}'\right) - r_a'^2 n_i\right\}.$$

Последний член в фигурных скобках можно представить в виде $\sum_k r_a'^2 \delta_{ik} n_k$. Тогда A_{Qi} будет выглядеть следующим образом:

$$A_{Qi} = \frac{1}{6c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a e_a\left\{3x_{ai}'\left(\sum_k n_k x_{ak}'\right) - \left(\sum_k r_a'^2\delta_{ik} n_k\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{6c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_k n_k\sum_a e_a\left\{3x_{ai}'x_{ak}' - r_a'^2\delta_{ik}\right\}.$$

Но сумма по a есть Q_{ik} — компонента тензора квадрупольного момента системы (см. формулу (43.13)). Следовательно,

$$A_{Qi} = \frac{1}{6c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_k Q_{ik} n_k = \frac{1}{6c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_i,$$

где Q_i — компонента вектора, получающегося при умножении вектора $\mathbf{n}$ на тензор Q_{ik}. Обозначив этот вектор символом $\mathbf{Q}$, можно написать

$$\mathbf{A}_Q = \frac{1}{6c^2 r}\ddot{\mathbf{Q}}. \qquad (81.7)$$

Потенциал $\mathbf{A}_Q$ определяется изменениями квадрупольного момента системы. Поэтому соответствующее излучение называется *квадрупольным*.

Магнитное поле квадрупольного излучения равно

$$\mathbf{B}_Q = [\nabla \mathbf{A}_Q] = \left[\nabla r,\ \frac{\partial \mathbf{A}_Q}{\partial r}\right] = \left[\mathbf{n}\,\frac{\partial \mathbf{A}_Q}{\partial r}\right].$$

При вычислении $\partial \mathbf{A}_Q/\partial r$ пренебрежем членом, пропорциональным $1/r^2$, и заменим производную по r производной по t. В результате получим

$$\mathbf{B}_Q = \frac{1}{6c^3 r}[\dddot{\mathbf{Q}}\mathbf{n}] \tag{81.8}$$

(мы переставили сомножители, чтобы не писать минус, вносимый множителем $-1/c$).

Воспользовавшись соотношением (80.5), найдем, что

$$\mathbf{E}_Q = \frac{1}{6c^3 r}[[\dddot{\mathbf{Q}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]. \tag{81.9}$$

По сравнению с формулами (80.4) выражения (81.8) и (81.9) имеют дополнительный множитель $1/6c$. Кроме того, вместо $\ddot{\mathbf{p}}$ в них стоит $\dddot{\mathbf{Q}}$. В остальном формулы для полей при квадрупольном излучении тождественны аналогичным формулам для дипольного излучения.

Соответствующие вычисления дают, что суммарная мощность всех трех видов излучения (включая дипольное) определяется выражением

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{p}}^2 + \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{m}}^2 + \frac{1}{180c^5}\sum_{i,\,k}\dddot{Q}_{ik}^2. \tag{81.10}$$

Произведем оценку относительной интенсивности излучения различных видов. Для простоты предположим, что заряды системы движутся по гармоническому закону. Тогда

$$r' = l\cos\omega t, \quad v = l\omega\sin\omega t,$$

где l — величина порядка размеров системы. Средние значения модулей $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ — величины порядка единицы. Поэтому в окончательных выражениях, характеризующих порядок величины рассматриваемых выражений, множители $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ мы будем отбрасывать. Например, если не иметь в виду необходимость дифференцирования по t, можно написать, что

$$r' \sim l, \quad v \sim l\omega. \tag{81.11}$$

Из определения (43.5) следует, что p есть величина порядка er', т. е.

$$p \sim el \cos \omega t, \quad \dot{p} \sim el\omega \sin \omega t, \quad \ddot{p} \sim el\omega^2 \cos \omega t.$$

Отсюда получаем, что по порядку величины мощность дипольного излучения определяется выражением

$$I_p \sim \frac{\ddot{p}^2}{c^3} \sim \frac{e^2 l^2 \omega^4}{c^3} \sim \frac{e^2 v^2 \omega^2}{c^3} \tag{81.12}$$

(см. (81.11)).

Из определения (51.15) следует, что магнитный момент имеет величину порядка $er'v/c$, т. е.

$$m \sim \frac{1}{c} el^2 \omega \cos \omega t \sin \omega t \sim \frac{1}{c} el^2 \omega \sin 2\omega t,$$

$$\dot{m} \sim \frac{1}{c} el^2 \omega^2 \cos 2\omega t, \quad \ddot{m} \sim \frac{1}{c} el^2 \omega^3 \sin 2\omega t.$$

Отсюда

$$I_m \sim \frac{\ddot{m}^2}{c^3} \sim \frac{e^2 l^4 \omega^6}{c^5} \sim \frac{e^2 v^4 \omega^2}{c^5} \tag{81.13}$$

Сопоставление выражений (81.12) и (81.13) дает, что

$$I_m : I_p = (v/c)^2 : 1.$$

Напомним, что вычисления полей излучаемых волн мы осуществили для нерелятивистского случая (т. е. для $v \ll c$). Следовательно, в исследованном нами случае интенсивность магнитно-дипольного излучения много меньше интенсивности электрического дипольного излучения.

Согласно определению (43.13) квадрупольный момент (а значит, и вектор **Q**) есть величина порядка er'^2, т. е.

$$Q \sim el^2 \cos^2 \omega t, \quad \dot{Q} \sim el^2 \omega \cos \omega t \sin \omega t \sim el^2 \omega \sin 2\omega t,$$

$$\ddot{Q} \sim el^2 \omega^2 \cos 2\omega t, \quad \dddot{Q} \sim e^2 l^2 \omega^3 \sin 2\omega t.$$

Следовательно,

$$I_Q \sim \frac{\dddot{Q}^2}{c^5} \sim \frac{e^2 l^4 \omega^6}{c^5} \sim \frac{e^2 v^4 \omega^2}{c^5}. \tag{81.14}$$

Таким образом, квадрупольное излучение обладает интенсивностью того же порядка величины, что и магнитно-дипольное излучение.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Уравнения Лагранжа для голономной системы с идеальными нестационарными связями

В случае нестационарных связей условия (4.2) имеют вид

$$f_l(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r). \quad \text{(I. 1)}$$

В соответствии с этим время входит и в функции (4.3):

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad \text{(I. 2)}$$

В формулах (4.4) и (4.5) появляется еще одно слагаемое

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l. \quad \text{(I. 3)}$$

Из (I. 3) следует соотношение

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_i}{\partial q_l}, \quad \text{(I. 4)}$$

совпадающее с (4.6). Формулы (4.7) также остаются без изменений:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_k} = 0. \quad \text{(I. 5)}$$

Поскольку величины $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ будут содержать не только q_k, но и t, выражение (4.8) немного усложнится:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) + \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_l =$$

$$= \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\,\partial q_k} + \sum_l \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_l\,\partial q_k}\dot{q}_l. \quad \text{(I. 6)}$$

Продифференцировав выражение (I.3) по q_k, получим

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) + \sum_l \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} + \sum_l \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_l.$$

Сопоставив это выражение с (I.6), приходим к соотношению

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \qquad (I.7)$$

совпадающему с (4.9).

Умножим уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = R_i + F_i^* \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ a)$$

(см. (4.1)) на $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ и просуммируем их по i:

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i F_i^* \frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \qquad (I.8)$$

Поскольку использованные в § 4 при преобразовании левой части этого уравнения соотношения (4.9), (4.6) и (4.7) остались без изменений (см. (I.7), (I.4) и (I.5)), не изменится и результат. Следовательно, левая часть (I.8) может быть представлена в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

(см. абзац, предшествующий формуле (4.15)).

Прежде чем перейти к рассмотрению правой части формулы (I.8), обсудим следующий вопрос. В слу ае стационарных связей $x_i = x_i(q_k)$ и приращение координаты x_i за время dt будет равно

$$dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k, \qquad (I.9)$$

где dq_k — приращения обобщенных координат за время dt. В случае нестационарных связей $x_i = x_i(q_k, t)$ и приращение x_i за время dt равно

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} dt + \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k, \qquad \text{(I. 10)}$$

где опять-таки dq_k — приращения координат q_k за время dt.

Если бы связи вдруг перестали изменяться, $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ обратилась бы в нуль и формула (I. 10) совпала бы с (I. 9). Следовательно, второе слагаемое в (I. 10) представляет собой воображаемое перемещение системы, которое получилось бы при «замороженных» связях. Его называют *виртуальным* (или возможным) *перемещением* и обозначают δx_i. Таким образом, истинное перемещение dx_i может быть представлено в виде суммы виртуального перемещения δx_i и слагаемого, равного $\frac{\partial x_i}{\partial t} dt$,

$$dx_i = \delta x_i + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt. \qquad \text{(I. 11)}$$

При стационарных связях виртуальное перемещение совпадает с истинным.

Теперь рассмотрим первое слагаемое в правой части формулы (I. 8). Умножив его на dq_k, получим

$$\left(\sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) dq_k = \sum_i R_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k\right) = \sum R_i \delta x_i, \qquad \text{(I. 12)}$$

где δx_i — виртуальное приращение координаты x_i, возникающее в том случае, когда изменяется только одна обобщенная координата q_k.

Работа реакций R_i при фиксированных нестационарных связях (так же как и при стационарных связях) равна нулю. Поэтому $\sum_i R_i \delta x_i = 0$ и так как $dq_k \neq 0$, то из (I. 12) вытекает, что

$$\sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0. \qquad \text{(I. 13)}$$

Заметим, что истинная работа реакций нестационарных связей согласно (I. 11) и (I. 13) равна

$$\sum_i R_i\, dx_i = \sum_i R_i\, \delta x_i + \sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\, dt = \sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\, dt$$

и, вообще говоря, отлична от нуля.

Итак, согласно (I. 13) первое слагаемое в правой части формулы (I. 8) равно нулю — реакции связей опять выпали из уравнений. Что же касается второго слагаемого, то оно по определению представляет собой обобщенную силу Q_k^* (см. формулу (4.12)). Таким образом, и для нестационарных связей мы пришли к уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^*.$$

II. Теорема Эйлера для однородных функций

Функция любого числа переменных называется однородной функцией этих переменных степени m, если при умножении всех переменных на произвольную величину α функция умножается на α^m, т. е.

$$f(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \ldots,\ \alpha x_n) \equiv \alpha^m f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Продифференцируем это тождество по α:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial(\alpha x_i)}\, x_i = m\alpha^{m-1} f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Положив $\alpha = 1$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, x_i = m f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Мы доказали *теорему Эйлера*, которая гласит: *сумма произведений частных производных однородной функции на соответствующие переменные равна произведению самой функции на степень ее однородности.*

III. Некоторые сведения из вариационного исчисления

1. Функционал. Если каждому числу x из чисел некоторого класса сопоставлено другое число y, то, как известно, мы имеем дело с функцией $y = y(x)$.

Если каждой функции $y(x)$ из некоторого класса функций сопоставлено некоторое число Ф, то говорят, что задан *функционал* $\Phi[y(x)]$.

Для наглядности мы будем иногда говорить вместо функции о кривой.

Итак, функция устанавливает соответствие:

число → число,

функционал же устанавливает соответствие:

функция (или кривая) → число.

Таким образом, в случае функционала роль аргумента играет функция (или кривая).

Поясним сказанное следующим примером. Пусть даны на плоскости x, y две фиксированные точки *1* и *2* (рис. III.1). Расстояние l_{12} между точками, отсчитанное вдоль соединяющей их кривой, есть функционал. Чтобы найти аналитическое выражение, связывающее величину l_{12} с функцией $y = y(x)$, описывающей кривую, учтем, что элемент кривой dl связан с dx и dy соотношением $dl^2 = dx^2 + dy^2$. Представив dy в виде $y'(x)dx$, получим, что $dl = \sqrt{dx^2 + (y'(x))^2 dx^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$. Наконец, проинтегрировав и обозначив l_{12} через $\Phi[y(x)]$, придем к выражению

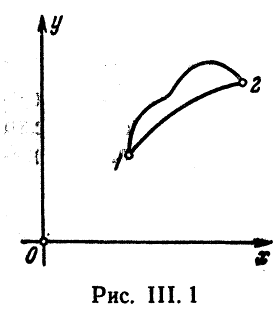


Рис. III. 1

$$\Phi[y(x)] = \int_1^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx. \qquad \text{(III. 1)}$$

Беря разные кривые, т. е. разные функции $y(x)$, мы будем получать разные числа Ф.

Подобно тому как бывают функции не одной, а нескольких переменных, существуют функционалы, зависящие от нескольких функций: $y_1(x), y_2(x), \ldots$ $\ldots, y_s(x)$[1].

---

[1]) Существуют также функционалы, зависящие от функций нескольких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Однако такие функционалы нам не понадобятся, и мы их рассматривать не будем.

Если функционал удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} \Phi[cy(x)] = c\Phi[y(x)] \quad (c \text{ — константа}), \\ \Phi[y_1(x) + y_2(x)] = \Phi[y_1(x)] + \Phi[y_2(x)], \end{gathered} \qquad \text{(III. 2)}$$

он называется *линейным*. Линейные функционалы мы будем обозначать символом $\Phi_{\text{лин}}$ или $F_{\text{лин}}$ и т. п.

Функционалы, зависящие от нескольких функций, могут оказаться линейными по отношению к одним функциям и нелинейными по отношению к другим. В этом случае, например, символ

$$\Phi_{\text{лин. по } y_2}[y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots]$$

будет означать функционал, линейный относительно функции $y_2(x)$.

Задачей вариационного исчисления является разработка методов нахождения экстремальных (т. е. максимальных, минимальных или стационарных) значений функционалов. Эта задача во многом сходна с задачей нахождения экстремумов обычных функций.

2. Вариация функционала. Выберем из рассматриваемого класса функций произвольную функцию $\tilde{y}(x)$ (чтобы отличить выбранную функцию от остальных функций данного класса, мы воспользовались значком тильда). Затем выберем из того же класса другую функцию $y(x)$. Разность этих двух функций называется вариацией функции $\tilde{y}(x)$. Вариацию обозначают символом $\delta y(x)$ или, короче, δy. Таким образом, вариация функции определяется следующим выражением

$$\delta y = y(x) - \tilde{y}(x). \qquad \text{(III. 3)}$$

Вариация функции аналогична приращению Δx (или dx) аргумента обычной функции: $\Delta x = x - \tilde{x}$.

Вариация δy функции $\tilde{y}(x)$ есть, очевидно, функция от x. Продифференцировав эту функцию по x, найдем согласно (III. 3), что

$$(\delta y)' = y'(x) - \tilde{y}'(x).$$

Правая часть этого выражения представляет собой вариацию функции $\tilde{y}'(x)$. Следовательно, мы приходим к соотношению

$$(\delta y)' = \delta y' \qquad \text{(III. 4)}$$

(производная вариации равна вариации производной).

Выясним, какая величина в вариационном исчислении соответствует дифференциалу обычной функции. Напомним, что если функция непрерывна[1]), то ее приращение Δy, равное $y(x)-y(\tilde{x})$, можно представить в виде суммы линейного относительно Δx слагаемого и бесконечно малой величины порядка выше первого по отношению к Δx:

$$\Delta y = y'(\tilde{x})\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x,$$

где ε — величина, обращающаяся в нуль вместе с Δx (иначе можно сказать, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon = 0$). Первое слагаемое в этом выражении называется дифференциалом функции. Таким образом, дифференциалом функции называется та часть приращения функции, которая линейна относительно Δx.

Для функции $y = x$ дифференциал совпадает с приращением. Следовательно, $\Delta x = dx$, так что выражение для дифференциала функции можно написать в виде

$$dy = y'(x)\,\Delta x \quad \text{либо} \quad dy = y'(x)\,dx. \qquad \text{(III. 5)}$$

Если малому изменению функции (малой δy) соответствует малое изменение функционала, то функционал называется *непрерывным*. Для непрерывных функционалов можно ввести величину, аналогичную дифференциалу обычной функции.

Приращение функционала $\Delta\Phi = \Phi[y(x)+\delta y] - \Phi[y(x)]$ есть величина, зависящая от двух функций: $y(x)$ и δy. Следовательно, $\Delta\Phi$ — также функционал. Этот функционал, вообще говоря, будет нелинейным. Если $\Delta\Phi[y(x)]$ можно представить в виде суммы линейного относительно δy функционала $F_{\text{лин. по }\delta y}[y(x), \delta y]$ и бесконечно малой величины порядка выше первого по отношению к $|\delta y|_{\max}$ (максимальному значению модуля функции δy), то главную, линейную относительно δy, часть приращения функционала называют *вариацией функционала*. Таким

[1]) Более строго, нужно было бы потребовать, чтобы функция была не только непрерывной, но также и дифференцируемой. Однако функции, рассматриваемые в физике, как правило, если непрерывны, то и дифференцируемы. Хотя, вообще говоря, в математике известны непрерывные функции, которые недифференцируемы.

образом,

$$\Delta\Phi [y(x)] = \delta\Phi [y(x)] + \varepsilon |\delta y|_{max}, \qquad (III.6)$$

где

$$\delta\Phi [y(x)] = F_{\text{лин. по } \delta y} [y(x), \delta y] \qquad (III.7)$$

есть вариация функционала, а ε — величина, обращающаяся в нуль вместе с $|\delta y|_{max}$.

Вариация функционала является аналогом дифференциала функции, определяемого выражением (III.5).

Определение (III.7) легко обобщить на случай функционалов, зависящих от нескольких функций:

$$\delta\Phi [y_1(x), y_2(x), \ldots, y_s(x)] =$$
$$= F_{\text{лин. по } \delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_s} [y_1(x), y_2(x), \ldots$$
$$\ldots, y_s(x), \delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_s]. \qquad (III.8)$$

В качестве иллюстрации найдем приращение функционала

$$\Phi [y(x)] = \int_a^b [y(x)]^2 dx. \qquad (III.9)$$

Это приращение равно

$$\Delta\Phi = \Phi [y(x) + \delta y] - \Phi [y(x)] =$$
$$= \int_a^b [y(x) + \delta y]^2 dx - \int_a^b [y(x)]^2 dx =$$
$$= \int_a^b [2y(x)\,\delta y + (\delta y)^2]\, dx = \int_a^b 2y(x)\,\delta y\, dx + \int_a^b (\delta y)^2 dx.$$

Интеграл $\int_a^b (\delta y)^2 dx$ не превосходит величину $|\delta y|_{max}^2 (b-a) = \{|\delta y|_{max}(b-a)\} |\delta y|_{max}$, где $|\delta y|_{max}$ — максимальное значение модуля функции δy в интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Выражение в фигурных скобках обращается в нуль вместе с $|\delta y|_{max}$. Следовательно, $\int_a^b (\delta y)^2 dx$ можно представить в виде $\varepsilon |\delta y|_{max}$, где

$\varepsilon \to 0$ при $|\delta y|_{\max} \to 0$. Тогда

$$\Delta\Phi = \int_a^b 2y(x)\,\delta y\,dx + \varepsilon\,|\delta y|_{\max}$$

(ср. с (III.6)). Первое слагаемое в этом выражении представляет собой функционал, зависящий от функций $y(x)$ и δy,

$$F_{\text{лин. по } \delta y}[y(x), \delta y] = \int_a^b 2y(x)\,\delta y\,dx. \qquad \text{(III. 10)}$$

Легко проверить, что этот функционал линеен[1]) по отношению к δy (см. условия (III.2)). Таким образом, выражение (III. 10) дает вариацию функционала (III. 9).

3. Необходимое условие экстремума функционала. Начнем опять с аналогичных понятий из анализа. О функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ говорят, что она имеет в точке $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ экстремум, если приращение этой функции

$$\Delta f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$$

имеет один и тот же знак для всех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежащих окрестности точки $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$. При $\Delta f \leqslant 0$ в данной точке имеет место максимум, при $\Delta f \geqslant 0$ — минимум.

В анализе доказывается, что необходимым условием для существования экстремума в некоторой точке является равенство нулю дифференциала функции в этой точке:

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\,dx_k = 0. \qquad \text{(III. 11)}$$

Аналогично говорят, что функционал $\Phi[y(x)]$ достигает экстремума при $y = \tilde{y}(x)$, если приращение функционала

$$\Delta\Phi = \Phi[y(x)] - \Phi[\tilde{y}(x)]$$

---

[1]) Данный функционал линеен также и по отношению к $y(x)$, но это не существенно — важна линейность лишь по отношению к δy.

имеет один и тот же знак для всех кривых $y(x)$, достаточно близких к кривой $\tilde{y}(x)$. При $\Delta\Phi \leqslant 0$ наблюдается максимум функционала, при $\Delta\Phi \geqslant 0$ — минимум.

Найдем условие, необходимое для достижения функционалом $\Phi[y(x)]$ экстремума при $y = \tilde{y}(x)$. Рассмотрим для определенности случай максимума. Если $\Phi[y(x)]$ достигает максимума при $y = \tilde{y}(x)$, это значит, что

$$\Phi[\tilde{y}(x) + \delta y] - \Phi[\tilde{y}(x)] \leqslant 0 \qquad \text{(III. 12)}$$

для всех $\delta y = \delta y(x)$, для которых $|\delta y|_{max}$ достаточно мал. Согласно (III. 7) и (III. 8)

$$\Delta\Phi = \Phi[\tilde{y}(x) + \delta y] - \Phi[\tilde{y}(x)] =$$
$$= F_{\text{лин. по } \delta y}[\tilde{y}(x), \delta y] + \varepsilon |\delta y|_{max} \qquad \text{(III. 13)}$$

Выделим из всех возможных вариаций δy те, которые могут быть представлены в виде $\delta y = \alpha \delta y_0$, где δy_0 — некоторая фиксированная достаточно малая вариация, а α — переменная алгебраическая величина. Подставив эту вариацию в (III. 13) и учтя, что в силу линейности $F[\tilde{y}(x), \alpha\delta y_0] = \alpha F[\tilde{y}(x), \delta y_0]$, можно написать

$$\Delta\Phi = \alpha F[\tilde{y}(x), \delta y_0] + \varepsilon\alpha |\delta y_0|_{max}.$$

В последнем выражении $F[\tilde{y}(x), \delta y_0]$ есть просто какое-то число. Если это число отлично от нуля, то при достаточно малых α знак $\Delta\Phi$ будет определяться знаком выражения $\alpha F[\tilde{y}(x), \delta y_0]$ (слагаемое $\varepsilon\alpha|\delta y_0|_{max}$ убывает гораздо быстрее, чем первое слагаемое[1])), а это выражение будет изменять знак вместе с α (которая может быть и положительной, и отрицательной). Таким образом, для выполнения условия (III. 12) необходимо равенство нулю величины $F[\tilde{y}(x), \delta y_0]$. Условие (III. 12) должно выполняться для всех без исключения достаточно малых вариаций δy. Мы же обнаружили, что при $\delta\Phi \neq 0$ хотя бы для части вариаций, имеющих вид $\alpha\delta y_0$, указанное условие не соблюдается. Поэтому можно высказать следующее утверждение: *для достижения функционалом* $\Phi[y(x)]$ *максимума при* $y = \tilde{y}(x)$ *необходимо, чтобы его*

---

[1]) Условие $\varepsilon \to 0$ при $|\delta y|_{max} \to 0$ в данном случае приобретает вид $\lim\limits_{\alpha \to 0} \varepsilon = 0$.

вариация (если она существует) *обращалась в нуль при* $y = \tilde{y}(x)$:

$$\delta\Phi = F_{\text{лин. по } \delta y}[\tilde{y}(x), \delta y] \equiv 0 \text{ [1]}. \qquad (III. 14)$$

Видно, что, повторив рассуждения для случая минимума функционала, мы придем к тому же заключению. Следовательно, формула (III. 14) выражает условие не только максимума, но и минимума, т. е. экстремума вообще. Эта формула является аналогом формулы (III. 11).

4. Простейшая задача вариационного исчисления. Найдем экстремум функционала вида

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x)]\, dx. \qquad (III. 15)$$

Граничные точки допустимых кривых предполагаются закрепленными — для всех допустимых кривых

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \qquad (III. 16)$$

Приращение функционала равно

$$\Delta\Phi = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y + \delta y, y' + \delta y']\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f[x, y, y']\, dx.$$

Разложим подынтегральную функцию в первом интеграле по степеням малых величин δy и $\delta y'$. В результате получим

$$\Delta\Phi = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ f[x, y, y'] + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \varepsilon(\delta y, \delta y') \right\} dx - \int_{x_1}^{x_2} f[x, y, y']\, dx,$$

где $\varepsilon(\delta y, \delta y')$ объединяет члены порядка выше первого относительно величин δy и $\delta y'$. Это выражение упрощается следующим образом:

$$\Delta\Phi = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(\delta y, \delta y')\, dx. \qquad (III. 17)$$

---

[1]) Знак тождества подчеркивает то обстоятельство, что условие (III. 14) должно выполняться для всех δy.

Проинтегрируем по частям второе слагаемое в первом интеграле. Для этого представим его в виде

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}(\delta y)'\,dx$$

(напомним, что $\delta y'=(\delta y)'$; см. формулу (III. 4)). Обозначив $\frac{\partial f}{\partial y'}$ через u, а $(\delta y)'dx$ через dv и воспользовавшись формулой $\int u\,dv=uv-\int v\,du$, получим

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}(\delta y)'\,dx=\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\,\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\,dx.$$

Вследствие того, что граничные точки допустимых кривых закреплены, вариация δy в этих точках должна обращаться в нуль: $\delta y(x_1)=0$, $\delta y(x_2)=0$. Поэтому первый член правой части равен нулю. Следовательно,

$$J=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\,dx.$$

Подставим найденное значение J в формулу (III. 17), вынеся δy за скобки,

$$\Delta\Phi=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}\delta y\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\varepsilon(\delta y,\,\delta y')\,dx.$$

Главную часть $\Delta\Phi$ образует первый интеграл, который представляет собой функционал, линейный относительно δy. По определению этот интеграл есть вариация функционала Φ. Итак, вариация функционала (III. 15) имеет вид

$$\delta\Phi=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}\delta y\,dx, \qquad \text{(III. 18)}$$

а условие экстремума (III. 14) запишется следующим образом:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right\}\delta y\,dx\equiv 0.$$

Полученное тождество должно выполняться для любых достаточно малых функций $\delta y = \delta y(x)$. Это возможно только при условии, что функция, стоящая под знаком интеграла в фигурных скобках, будет равна нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \qquad \text{(III. 19)}$$

Это уравнение называется *уравнением Эйлера*. Оно представляет собой условие экстремума функционалов вида (III. 15). Кривые $y = y(x, C_1, C_2)$, являющиеся решениями этого уравнения, называются *экстремалями* (C_1 и C_2 — постоянные интегрирования).

Заметим, что прибавление в (III. 15) к подынтегральной функции полной производной по x от любой функции $\psi(y, x)$ не изменяет условий экстремума (III. 19). Действительно, это слагаемое после интегрирования дает величину

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\psi}{dx}\,dx = \psi(y_2,\ x_2) - \psi(y_1,\ x_1),$$

вариация которой равна нулю (по условию (III. 16) кривые на концах не варьируются). Таким образом, добавление $d\psi/dx$ изменяет лишь значение экстремума функционала, но не влияет на вид функции $y(x)$, при которой этот экстремум достигается.

Воспользуемся формулой (III. 19) для нахождения экстремума функционала (III. 1). В этом случае $f(x,\ y,\ y') = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = -\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}$$

и уравнение (III. 19) примет вид

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{y'^2}{(1 + y'^2)^{3/2}}\right) y'' = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция, для которой $y'' = 0$, а $y' = a$. Следовательно, сама функция есть линейная функция: $y = ax + b$, коэффициенты которой нужно подобрать так, чтобы выполнялись условия (III. 16). Значит, функционал (III. 1) достигает экстремума (в данном

случае, очевидно, минимума), если в качестве $y(x)$ взять прямую линию, соединяющую точки *1* и *2* (см. рис. III. 1).

5. Экстремум функционалов, зависящих от нескольких функций. Рассмотрим функционал вида

$$\Phi[y_1, y_2, \ldots, y_s] = \\ = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y_1, y_2, \ldots, y_s, y'_1, y'_2, \ldots, y'_s]\,dx, \quad \text{(III. 20)}$$

где $y_k = y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ — кривые, закрепленные в граничных точках, т. е. удовлетворяющие граничным условиям

$$y_k(x_1) = y_{k1}, \quad y_k(x_2) = y_{k2} \quad (k = 1, 2, \ldots, s). \quad \text{(III. 21)}$$

В соответствии со сказанным в п. 4 вариация функционала (III. 20) определяется выражением

$$\delta\Phi = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f}{\partial y'_k} \delta y'_k \right) dx, \quad \text{(III. 22)}$$

где δy_k — достаточно малые функции от x, обращающиеся в нуль в граничных точках

$$\delta y_k(x_1) = 0, \quad \delta y_k(x_2) = 0. \quad \text{(III. 23)}$$

Требуется найти такую совокупность функций $\tilde{y}_k(x)$, удовлетворяющих условиям (III. 21), при которых функционал (III. 20) достигает экстремума. Необходимым условием экстремума является равенство нулю вариации функционала (III. 22).

Интегрируя по частям каждое из s слагаемых вида

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'_k} \delta y'_k \, dx,$$

входящих в формулу (III. 22), можно привести его к виду

$$-\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_k} \right) \delta y_k \, dx.$$

Произведя такую замену в (III. 22) и приравняв нулю получившееся выражение для $\delta\Phi$, придем к необхо-

димому условию экстремума:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_k'} \right) \delta y_k \, dx \equiv 0. \qquad \text{(III. 24)}$$

Это тождество должно выполняться для любых выбранных независимо друг от друга достаточно малых функций $\delta y_k = \delta y_k(x)$, что возможно лишь при условии, что все s выражений, стоящих под знаком суммы в круглых скобках, будут равны нулю. Таким образом, мы пришли к системе уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_k'} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s). \qquad \text{(III. 25)}$$

Совокупность функций $y_k = \tilde{y}_k(x)$, удовлетворяющих этим уравнениям и граничным условиям (III. 21), при подстановке в функционал (III. 20) даст его экстремум.

IV. Конические сечения

Коническими сечениями называются линии пересечения кругового конуса с плоскостью. В зависимости от ориентации плоскости по отношению к оси конуса эти линии представляют собой эллипс (круг), гиперболу или параболу.

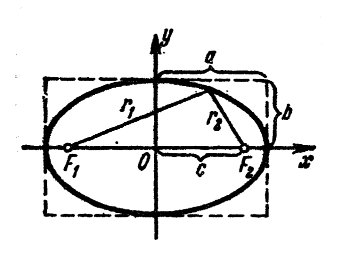


Рис. IV. 1

Эллипсом (рис. IV.1) называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 называемых *фокусами*, есть величина постоянная:

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad \text{(IV. 1)}$$

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(IV. 2)}$$

где a и b — большая и малая полуоси эллипса. Величина

$$e = \frac{c}{a}, \qquad \text{(IV. 3)}$$

где c — половина расстояния между фокусами, называется *эксцентриситетом* эллипса. При $e = 0$ эллипс вырождается в окружность. Величины a, b и c связаны соотношением

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad \text{(IV. 4)}$$

Гиперболой (рис. IV. 2) называется геометрическое место точек, модуль разности расстояний которых до

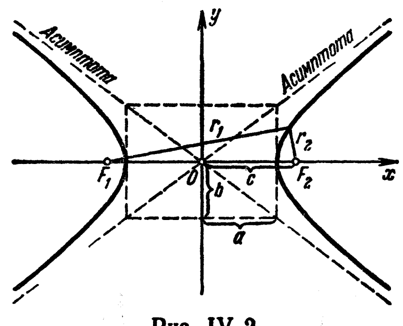


Рис. IV. 2

двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная:

$$|r_1 - r_2| = 2a. \qquad \text{(IV. 5)}$$

Гипербола имеет две симметричные ветви. Каноническое уравнение гиперболы выглядит следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(IV. 6)}$$

где a и b — действительная и мнимая полуоси гиперболы. Величины a и b связаны с c (половиной расстояния между фокусами) соотношением

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad \text{(IV. 7)}$$

Эксцентриситет гиперболы определяется той же формулой (IV. 3), что и эксцентриситет эллипса. Видно, что для эллипса $e < 1$, а для гиперболы $e > 1$.

Параболой (рис. IV. 3) называется геометрическое место точек, расстояние которых r до фиксированной точки F (фокуса) равно расстоянию d до фиксированной прямой D, называемой *директрисой* параболы:

$r = d$. Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px, \qquad \text{(IV. 8)}$$

где p — параметр параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы (ось x направлена по оси симметрии параболы, а начало координат совпадает с вершиной параболы). Эксцентриситет параболы следует, как мы увидим ниже, принять равным 1.

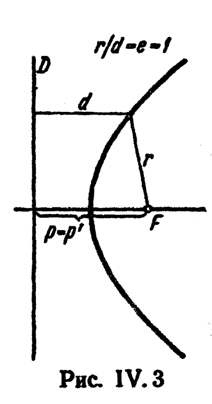


Рис. IV. 3

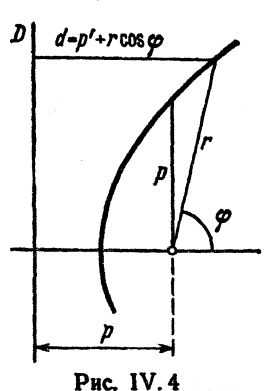


Рис. IV. 4

Любое коническое сечение можно определить как геометрическое место точек, для которых отношение расстояния r (рис. IV. 4) до точки F (называемой фокусом) к расстоянию d до прямой D (называемой директрисой) есть постоянная величина e (называемая эксцентриситетом кривой):

$$\frac{r}{d} = e. \qquad \text{(IV. 9)}$$

Таблица IV.1

Значение e	Вид кривой
<1	эллипс
1	парабола
>1	гипербола

В зависимости от значения эксцентриситета e получается то либо иное коническое сечение (табл. IV. 1).

У эллипса и гиперболы имеются по два фокуса и по две директрисы. Условие (IV. 9) выполняется для каждого из фокусов и соответствующей ему директрисы. На рис. IV. 5 показаны фокусы и директрисы эллипса *а*) и гиперболы *б*) (ср. с рис. IV. 3 для параболы).

Расстояние p' от фокуса до директрисы называется параметром кривой. Величина

$$p = p'e \qquad \text{(IV. 10)}$$

называется *фокальным параметром*. Легко сообразить, что он равен половине хорды, проходящей через фокус и параллельной директрисе (рис. IV. 4). Для параболы $p = p'$.

Расстояние между директрисами эллипса (гиперболы) равно $2(a/e)$, где a — большая (действительная) полуось кривой.

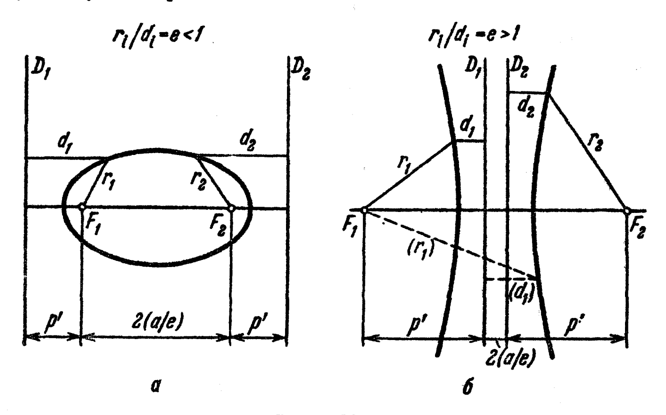


Рис. IV. 5

Напишем уравнение конического сечения в полярных координатах, поместив начало координат в одном из фокусов кривой (рис. IV. 4). В соответствии с (IV. 9)

$$\frac{r}{d} = \frac{r}{p' + r\cos\varphi} = e,$$

откуда

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi} \qquad \text{(IV. 11)}$$

($p = p'e$; см. (IV. 10)).

Уравнение (IV. 11) описывает эллипс (с началом координат в точке F_1; рис. IV. 5, *а*), правую ветвь гиперболы (с началом координат в точке F_2; рис. IV. 5, *б*) и параболу. Отметим, что фокус F_2 является для правой ветви гиперболы внутренним.

Если поместить начало координат в правом фокусе эллипса (точка F_2 на рис. IV. 5, *а*), то, как следует из рис. IV. 6, уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{r}{p' - r\cos\varphi} = e,$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \qquad \text{(IV. 12)}$$

$(p = p'e)$. Это же уравнение описывает левую ветвь гиперболы (см. рис. IV. 5, *б*) при условии, что начало координат помещено в точку F_1 (во внутренний по отношению к этой ветви фокус), а также параболу, являющуюся зеркальным (относительно D) отражением параболы, изображенной на рис. IV. 3. Фокус F такой параболы лежит слева от директрисы D.

Рис. IV. 6

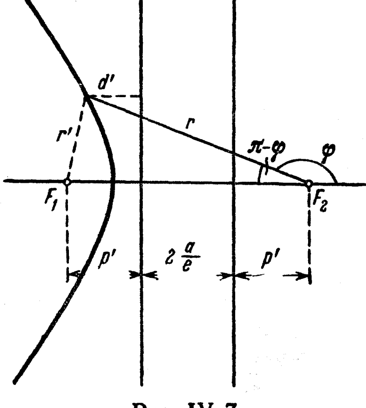


Рис. IV. 7

Найдем уравнение одной из ветвей гиперболы (скажем, левой) при условии, что начало координат помещено во внешний по отношению к этой ветви фокус (в точку F_2 для левой ветви; рис. IV. 5, *б*). В этом случае (рис. IV. 7)

$$d' = r\cos(\pi - \varphi) - 2\frac{a}{e} - p' = -r\cos\varphi - 2\frac{a}{e} - p'.$$

Согласно определению гиперболы (IV. 5) $r - r' = 2a$, откуда

$$r' = r - 2a.$$

Подставив найденные нами значения d' и r' в соотношение (IV. 9), придем к формуле

$$\frac{r'}{d'} = \frac{r - 2a}{-r\cos\varphi - 2\frac{a}{e} - p'} = e.$$

После несложных преобразований получим искомое уравнение

$$r = \frac{-p}{1 + e\cos\varphi} \qquad \text{(IV. 13)}$$

($p = p'e$). Следует иметь в виду, что для левой ветви $\varphi > \frac{\pi}{2}$ (см. рис. IV. 7), т. е. $\cos\varphi < 0$. Кроме того, для всех точек $|e\cos\varphi| > 1$, так что значения r, получаемые по формуле (IV. 13), будут положительными.

Предоставляем читателю убедиться в том, что аналогичное уравнение для правой ветви (начало координат в точке F_1) имеет вид

$$r = \frac{-p}{1 - e\cos\varphi}. \qquad \text{(IV. 14)}$$

В этом случае $\varphi < \frac{\pi}{2}$, так что $\cos\varphi > 0$; кроме того, $e\cos\varphi > 1$, так что значения r положительны.

V. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \qquad \text{(V. 1)}$$

т. е. уравнение, линейное относительно неизвестной функции $y(x)$ и ее производных (a_i — постоянные величины, которые могут быть и нулями).

Если правая часть уравнения тождественно равна нулю ($f(x) \equiv 0$), то линейное уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*. Однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad \text{(V. 2)}$$

Общим решением дифференциального уравнения называется множество решений, включающее все без

исключения частные решения. Общее решение всякого дифференциального уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных (постоянных интегрирования), т. е. имеет вид

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{V.3}$$

Придав постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определенные значения, получим частное решение. Частное решение не содержит произвольных постоянных величин.

В теории линейных дифференциальных уравнений доказывается, что если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть линейно независимые[1]) решения однородного уравнения (V.2), то общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{V.4}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пусть $\tilde{y}(x)$ есть одно из частных решений неоднородного уравнения (V.1), а $y(x)$ — общее решение того же уравнения. Если ввести обозначение $u(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$, то общее решение можно записать следующим образом:

$$y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = u(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) + \tilde{y}(x). \tag{V.5}$$

Подставим эту функцию в уравнение (V.1) и сгруппируем отдельно слагаемые вида $u^{(k)}$ и слагаемые вида $\tilde{y}^{(k)}$:

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + a_1u' + a_0u + \\ + [\tilde{y}^{(n)} + a_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)} + \ldots + a_1\tilde{y}' + a_0\tilde{y}] = f(x).$$

Функция $\tilde{y}(x)$ есть частное решение уравнения. Следовательно, выражение, заключенное в квадратные скобки, равно правой части уравнения. Отсюда вытекает, что функция $u(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ удовлетворяет условию

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + a_1u' + a_0u = 0.$$

---

[1]) Совокупность функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ называется линейно независимой, если соотношение вида

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n \equiv 0$$

выполняется только при условии, что все α_i равны нулю.

Таким образом, u является общим решением однородного уравнения (V.2), соответствующего неоднородному уравнению (V.1), т. е. имеющего такие же коэффициенты a_k, что и уравнение (V.1).

Полученный нами результат можно сформулировать следующим образом: *общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения:*

$$y\,(\text{общ., неоднор.}) = \\ = y\,(\text{общ., однор.}) + y\,(\text{частн., неоднор.}). \qquad (V.6)$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами решают с помощью подстановки

$$y(x) = \exp(\lambda x), \qquad (V.7)$$

где λ — постоянная величина. Продифференцировав эту функцию m раз ($m = 1, 2, \ldots, n$), получим

$$y^{(m)} = \lambda^m \exp(\lambda x). \qquad (V.8)$$

Подставив значения функции (V.7) и ее производных (V.8) в уравнение (V.2) и сократив на отличный от нуля множитель $\exp(\lambda x)$, придем к так называемому характеристическому уравнению

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (V.9)$$

Корни этого уравнения представляют собой те значения λ, при которых функция (V.7) удовлетворяет уравнению (V.2).

Если все n корней характеристического уравнения будут различными (будут отсутствовать кратные, т. е. совпадающие корни), n частных решений вида $\exp(\lambda_i x)$ окажутся линейно независимыми. Следовательно, при отсутствии кратных корней общее решение уравнения (V.2) выглядит следующим образом:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(\lambda_i x) \qquad (V.10)$$

($C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные).

Можно показать, что в случае, когда характеристическое уравнение (V.9) имеет кратные корни, то p_μ линейно независимых частных решений, отвечающих

корню λ_μ кратности p_μ, должны быть взяты в виде

$$\exp(\lambda_\mu x),\quad x\exp(\lambda_\mu x),\quad x^2\exp(\lambda_\mu x),\ \ldots,\ x^{p_\mu-1}\exp(\lambda_\mu x),$$

так что соответствующий им вклад в общее решение равен сумме

$$\sum_{k=1}^{p_\mu} C_{\mu k}x^{k-1}\exp(\lambda_\mu x).$$

Следовательно, если корень λ_1 будет кратности p_1, λ_2 — кратности p_2, ..., λ_m — кратности p_m $(p_1+p_2+\ldots+p_m=n)$, то общее решение можно представить в виде

$$y=\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_\mu} C_{\mu k}x^{k-1}\exp(\lambda_\mu x). \qquad \text{(V. 11)}$$

Допустим, что коэффициенты a_k в уравнении (V. 1) действительные, а функция $f(x)$ комплексная. Представив ее в виде

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x),$$

получим уравнение

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=f_1(x)+if_2(x). \qquad \text{(V. 12)}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y(x)=y_1(x)+iy_2(x).$$

Подстановка в (V. 12) дает

$$\left(y_1^{(n)}+a_{n-1}y_1^{(n-1)}+\ldots+a_1y_1'+a_0y_1\right)+$$
$$+i\left(y_2^{(n)}+a_{n-1}y_2^{(n-1)}+\ldots+a_1y_2'+a_0y_2\right)=$$
$$=f_1(x)+if_2(x). \qquad \text{(V. 13)}$$

У равных друг другу комплексных чисел равны порознь действительные и мнимые части. Следовательно, уравнение (V. 13) распадается на два независимых уравнения вида (V. 1). В одном из них справа стоит функция $f_1(x)$, его решением является функция $y_1(x)$. В другом справа стоит функция $f_2(x)$, его решением является функция $y_2(x)$. Это свойство уравнения (V. 13) обусловлено его линейностью. Оно позволяет воспользоваться следующим приемом, иногда

значительно облегчающим вычисления. Пусть в решаемом нами уравнении (V. 1) правая часть действительная. Прибавим к ней произвольную мнимую функцию. Найдя затем комплексное решение получившегося уравнения, возьмем его действительную часть. Она будет представлять собой решение исходного дифференциального уравнения.

Очевидно следующее утверждение: если линейное однородное уравнение (V. 2) с действительными коэффициентами имеет комплексное решение $y(x)=y_1(x)+iy_2(x)$, то каждая из функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в отдельности является решением этого уравнения.

VI. Векторы

1. Основные определения. Векторами называются величины, которые характеризуются численным значением (модулем) и направлением и, кроме того, складываются геометрически (т. е. по правилу параллелограмма). Ниже мы дадим более общее определение, позволяющее распространить понятие вектора на пространство n измерений.

Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется скалярная величина

$$\mathbf{ab}=ab\cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b}). \qquad \text{(VI. 1)}$$

Скалярное произведение коммутативно: $\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$ и дистрибутивно: $\mathbf{a}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\ldots)=\mathbf{ab}_1+\mathbf{ab}_2+\ldots$, но не ассоциативно: $\mathbf{a}(\mathbf{bc})\neq(\mathbf{ab})\mathbf{c}$.

Векторным произведением называется вектор [1])

$$[\mathbf{ab}]=ab\sin(\mathbf{a},\ \mathbf{b})\cdot\mathbf{n}, \qquad \text{(VI. 2)}$$

где $\mathbf{n}$ — орт (единичный вектор) нормали к плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, причем последовательность $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ образует правовинтовую систему.

Векторное произведение не коммутативно: $[\mathbf{ab}]\neq[\mathbf{ba}]$, дистрибутивно: $[\mathbf{a}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\ldots)]=[\mathbf{ab}_1]+[\mathbf{ab}_2]+\ldots$ и не ассоциативно: $[[\mathbf{ab}]\mathbf{c}]\neq[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]$.

Рассмотрим *смешанное* (векторно-скалярное) *произведение* трех векторов: $\mathbf{a}[\mathbf{bc}]$. Применив формулы

[1]) Наряду с записью $[\mathbf{ab}]$, которой мы будем пользоваться, для обозначения векторного произведения применяется также символ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

(VI. 1) и (VI 2), получим

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = a\{bc \sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})\} \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n}).$$

Из рис. VI. 1 легко видеть, что полученное нами выражение равно объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах[1]). Действительно,

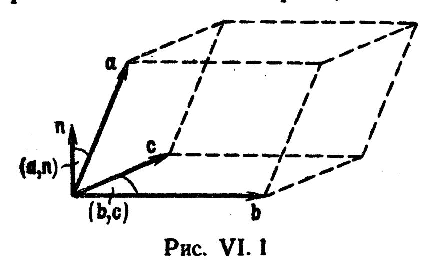


Рис. VI. 1

$bc \sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ дает площадь основания параллелепипеда, а $a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ — его высоту.

В качестве основания параллелепипеда можно взять также грань, стороны которой образуют векторы **c** и **a** либо векторы **a** и **b**. Тогда объем будет определяться смешанными произведениями $\mathbf{b}[\mathbf{ca}]$ и $\mathbf{c}[\mathbf{ab}]$. Поскольку объем во всех трех случаях один и тот же, можно написать

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = \mathbf{c}[\mathbf{ab}]. \qquad \text{(VI. 3)}$$

Таким образом, смешанное произведение допускает циклическую перестановку сомножителей, т. е. замену каждого из сомножителей следующим за ним или предшествующим ему сомножителем. Следующим за **c** следует считать вектор **a**, а предшествующим **a** — вектор **c**, что нагляднее всего вытекает из следующей схемы:

$$\begin{array}{c} \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} \\ \nwarrow \ \swarrow \\ \mathbf{c} \end{array} \qquad \text{(VI. 4)}$$

Отметим, что во всех трех выражениях формулы (VI. 3) векторы идут в той же последовательности, что и на схеме (VI. 4). Если взять векторы в последовательности, противоположной изображенной на схеме (VI. 4), то смешанное произведение изменит знак.

---

[1]) Предполагается, что угол (**a**, **n**) острый. Если этот угол тупой, то смешанное произведение равно объему параллелепипеда, взятому со знаком минус.

Двойным векторным произведением называется вектор $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]$. Можно показать (мы сделаем это ниже), что

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}) \qquad \text{(VI.5)}$$

(эта формула читается «бац минус цаб»).

В соответствии с определениями (VI.2) и (VI.1) квадрат векторного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ может быть преобразован следующим образом:

$$[\mathbf{ab}]^2 = a^2b^2\sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ = a^2b^2 - a^2b^2\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$

Мы пришли к формуле

$$[\mathbf{ab}]^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2. \qquad \text{(VI.6)}$$

2. Формулы векторной алгебры, выраженные через проекции векторов на координатные оси. Все приведенные выше определения и формулы не зависят от выбора системы координат, в которой ведется рассмотрение. Если установить систему координат (мы будем рассматривать только прямоугольные, т. е. декартовы системы), то каждый вектор может быть задан тремя числами — его проекциями на координатные оси[1]). Следовательно, вектор $\mathbf{a}$ эквивалентен тройке чисел a_x, a_y, a_z, вектор $\mathbf{b}$ — тройке чисел b_x, b_y, b_z и т. д.

Зная проекции вектора на координатные оси, можно найти сам вектор. Обозначив орты координатных осей[2]) символами $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, можно представить вектор в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x a_x + \mathbf{e}_y a_y + \mathbf{e}_z a_z. \qquad \text{(VI.7)}$$

Чтобы получить возможность записывать формулы в компактной форме с помощью знака суммы $\sum$, будем в дальнейшем пользоваться следующими обозначениями. Вместо координаты x будем писать x_1, вместо y — x_2 и вместо z — x_3. Аналогично для ортов осей введем обозначения: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Соответствие между

---

[1]) Мы рассматриваем так называемые свободные векторы, для которых не фиксированы точка приложения и прямая, вдоль которой направлен вектор.

[2]) Эти орты обозначают также символами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Однако принятые нами обозначения, как будет видно из последующего изложения, имеют несомненное преимущество.

прежними и новыми обозначениями дано на приводимых ниже схемах:

$$x \to x_1,\quad y \to x_2,\quad z \to x_3. \tag{VI.8}$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_x \to \mathbf{e}_1,\quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_y \to \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_z \to \mathbf{e}_3. \tag{VI.9}$$

В новых обозначениях формула (VI.7) может быть записана в виде

$$\mathbf{a} = \sum_k \mathbf{e}_k a_k \tag{VI.10}$$

(во всех случаях, когда не будет оговорено противное, мы будем предполагать, что индекс, по которому производится суммирование,— *немой индекс* — пробегает значения 1, 2, 3).

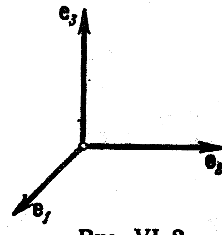


Рис. VI.2

Тройка векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образует базис координатной системы. Задание этих векторов полностью определяет систему. Поскольку $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ взаимно перпендикулярны, а модули их равны единице, из формулы (VI.1) вытекает, что

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \delta_{ik}, \tag{VI.11}$$

где δ_{ik} — так называемый *символ Кронекера*, который определяется следующим образом:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \tag{VI.12}$$

Отметим[1], что $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Из формулы (VI.2) следует, что (рис. VI.2)

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3,\quad [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1,\quad [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2. \tag{VI.13}$$

---

[1] В Приложении X будет показано, что совокупность величин δ_{ik} образует симметричный тензор второго ранга.

Отметим, что каждое из соотношений (VI. 13) может быть получено из предыдущего (или последующего) с помощью циклической перестановки индексов по схеме

$$\begin{array}{c} 1 \rightarrow 2 \\ \nwarrow \swarrow \\ 3 \end{array} \qquad \text{(VI. 14)}$$

Введём символ [1])

$$\varepsilon_{ikl}, \qquad \text{(VI.15)}$$

обозначающий набор из 27 чисел, которые определяются следующими правилами:

1) если значения хотя бы двух индексов совпадают, то $\varepsilon_{ikl} = 0$ (например, $\varepsilon_{11l} = \varepsilon_{2k2} = \varepsilon_{i33} = \varepsilon_{222} = 0$);

2) если все индексы разные и образуют циклическую перестановку последовательности 1 2 3, то $\varepsilon_{ikl} = 1$ ($\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$);

3) если все индексы разные и образуют циклическую перестановку последовательности 3 2 1, то $\varepsilon_{ikl} = -1$ ($\varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$).

Таким образом, из 27 значений ε_{ikl} 21 равно нулю, 3 равны $+1$ и 3 равны -1.

Заметим, что любая циклическая перестановка чисел 1 2 3 может быть получена из 1 2 3 посредством четного числа перестановок (транспозиций) двух индексов, а любая циклическая перестановка чисел 3 2 1 может быть получена из 1 2 3 посредством нечетного числа перестановок двух индексов. Действительно, поменяв, например, в последовательности 1 2 3 местами 1 и 2 (что даст 2 1 3, т. е. циклическую перестановку чисел 3 2 1), а затем поменяв местами 1 и 3, получим перестановку 2 3 1.

Следовательно, значения символа ε_{ikl} можно определить так: 1) они равны нулю при совпадении значений хотя бы двух индексов, 2) они равны $+1$ или -1 в зависимости от того, каким — четным или нечетным — числом перестановок может быть получена последовательность $i\,k\,l$ из последовательности 1 2 3.

---

[1]) Его называют иногда кососимметричным символом Кронекера. В Приложении X будет показано, что совокупность величин ε_{ikl} образует абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга.

Для определения знака ε_{ikl} можно пользоваться также следующим правилом. Назовем беспорядком в перестановке тот факт, что большее число стоит впереди меньшего. Так, например, в перестановке 2 1 3 содержится один беспорядок: 2 стоит впереди 1, а в перестановке 3 2 1 три беспорядка: 3 стоит перед 1, 3 стоит перед 2 и 2 стоит перед 1. Припишем ε_{ikl} значение $+1$, если число беспорядков в перестановке $i\,k\,l$ является четным, и -1, если число беспорядков нечетное. Легко убедиться в том, что все три рассмотренные нами правила определения знака ε_{ikl} дают одинаковый результат.

Докажем следующее очень полезное соотношение между символами ε и δ:

$$\sum_l \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{mnl} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}. \qquad \text{(VI. 16)}$$

Раскроем сумму, стоящую в левой части:

$$\varepsilon_{ik1}\varepsilon_{mn1} + \varepsilon_{ik2}\varepsilon_{mn2} + \varepsilon_{ik3}\varepsilon_{mn3} \qquad \text{(VI. 17)}$$

и выясним, при каких значениях индексов i, k, m, n эта сумма отлична от нуля. Очевидно, что для отличия хотя бы одного слагаемого от нуля должны выполняться одновременно условия

$$i \neq k \quad \text{и} \quad m \neq n. \qquad \text{(VI. 18)}$$

Кроме того, должно быть

$$i = m, \quad k = n \quad \text{или} \quad i = n, \quad k = m. \qquad \text{(VI. 19)}$$

Действительно, если при соблюдении условия (VI. 18) не будет соблюдаться условие (VI. 19), то в каждом из слагаемых в (VI. 17) в числе значений первых двух индексов обоих сомножителей будут фигурировать и 1, и 2, и 3. Поэтому немой индекс l в каждом из слагаемых совпадет со значением одного из индексов i, k, m, n, так что все слагаемые будут нулями.

Объединим условия (VI. 18) и (VI. 19) в одно, выражаемое формулами

$$i = m \neq k = n, \qquad \text{(VI. 20)}$$

$$i = n \neq k = m. \qquad \text{(VI. 21)}$$

В случае, соответствующем соотношениям (VI. 20), сумма (VI. 17) имеет вид

$$\varepsilon_{mn1}\varepsilon_{mn1} + \varepsilon_{mn2}\varepsilon_{mn2} + \varepsilon_{mn3}\varepsilon_{mn3}.$$

Очевидно, что отличным от нуля будет только одно слагаемое (для которого m, n и l различны), причем оно равно $+1$.

В случае, соответствующем соотношениям (VI. 21), сумма (VI. 17) имеет вид

$$\varepsilon_{nm1}\varepsilon_{mn1}+\varepsilon_{nm2}\varepsilon_{mn2}+\varepsilon_{nm3}\varepsilon_{mn3}.$$

В этой сумме также отлично от нуля только одно слагаемое, причем оно равно произведению $+1$ на -1, т. е. -1 (при перестановке двух индексов ε_{nml} меняет знак).

Теперь обратимся к правой части формулы (VI. 16), т. е. к выражению

$$\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}. \qquad \text{(VI. 22)}$$

Если $i=k$ (или $m=n$), это выражение принимает вид $\delta_{km}\delta_{kn}-\delta_{kn}\delta_{km}$ (либо $\delta_{in}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{kn}$). Оба эти выражения равны нулю. Отсюда следует, что для отличия выражения (VI. 22) от нуля должны одновременно выполняться условия

$$i\neq k \quad \text{и} \quad m\neq n \qquad \text{(VI. 23)}$$

(ср. с (VI. 18)). Кроме того, должно соблюдаться одно из двух следующих условий:

$$i=m, \quad k=n, \qquad \text{(VI. 24)}$$

$$i=n, \quad k=m. \qquad \text{(VI. 25)}$$

При соблюдении условия (VI. 24) первый член выражения (VI. 22) равен $+1$. Поскольку $i=m$, а $m\neq n$ (см. (VI. 23)), то $i\neq n$ и второй член выражения (VI. 22) равен нулю. Следовательно, при соблюдении условия (VI. 24) выражение (VI. 22) равно $+1$. Совокупность условий (VI. 23) и (VI. 24) эквивалентна условию (VI. 20), при котором, как мы установили, левая часть формулы (VI. 16) также обращается в $+1$.

При соблюдении условия (VI. 25), которое в сочетании с (VI. 23) эквивалентно условию (VI. 21), выражение (VI. 22) обращается в -1.

Таким образом, соотношение (VI. 16) нами доказано.

С помощью символа ε_{ikl} совокупность соотношений (VI. 13) может быть представлена в виде одного

выражения

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k] = \sum_l \varepsilon_{ikl}\mathbf{e}_l. \qquad \text{(VI. 26)}$$

Действительно, при $i=1$, $k=2$ отличным от нуля будет только слагаемое $\varepsilon_{123}\mathbf{e}_3$, равное $\mathbf{e}_3$, при $i=2$, $k=3$ отлично от нуля слагаемое $\varepsilon_{231}\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1$ и, наконец, при $i=3$, $k=1$ отлично от нуля слагаемое $\varepsilon_{312}\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2$.

Выражение (VI. 26) дает даже больше чем совокупность трех соотношений (VI. 13). Оно содержит 9 соотношений. Из него следует, что векторное произведение любого орта на самого себя равно нулю — при $i=k$ все слагаемые в правой части формулы (VI. 26) обращаются в нуль. Кроме того, в (VI. 26) содержатся выражения, получающиеся из (VI. 13) перестановкой сомножителей. Так, например, при $i=2$, $k=1$ справа в (VI. 26) отлично от нуля слагаемое $\varepsilon_{213}\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_3$ и т. д.

Образуем скалярное произведение векторов $\mathbf{a}=\sum \mathbf{e}_i a_i$ и $\mathbf{b}=\sum \mathbf{e}_k b_k$:

$$\mathbf{ab}=\Big(\sum_i \mathbf{e}_i a_i\Big)\Big(\sum_k \mathbf{e}_k b_k\Big).$$

Воспользовавшись свойством дистрибутивности, можно написать

$$\mathbf{ab}=\sum_{i,\,k}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k a_i b_k=\sum_{i,\,k}\delta_{ik}a_i b_k$$

(см. формулу (VI. 11)). В соответствии с определением δ_{ik} в последней сумме отличны от нуля лишь слагаемые с одинаковыми значениями индексов i и k. Следовательно,

$$\mathbf{ab}=\sum_i a_i b_i \qquad \text{(VI. 27)}$$

или, переходя к обычным обозначениям,

$$\mathbf{ab}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z. \qquad \text{(VI. 28)}$$

Для заданных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ их проекции на координатные оси зависят от выбора системы координат, но само произведение $\mathbf{ab}$ от этого выбора не зависит. Отсюда заключаем, что выражение $a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$ есть инвариант, т. е. величина, одинаковая во всех системах координат.

Пусть нам дана совокупность трех чисел u, v, w, о которых известно, что в комбинации с проекциями некоторого вектора $\mathbf{a}$ они дают скаляр, т. е. инвариант:

$$ua_x + va_y + wa_z = \text{inv}.$$

Тогда на основании сказанного выше можно утверждать, что u, v, w суть компоненты[1]) некоторого вектора.

Образуем векторное произведение векторов $\mathbf{a} = \sum \mathbf{e}_i a_i$ и $\mathbf{b} = \sum \mathbf{e}_k b_k$:

$$[\mathbf{ab}] = \Big[\sum_i \mathbf{e}_i a_i,\ \sum_k \mathbf{e}_k b_k\Big].$$

В силу дистрибутивности можно написать

$$[\mathbf{ab}] = \sum_{i,\,k} [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k]\, a_i b_k.$$

Заменим $[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k]$ в соответствии с формулой (VI.26):

$$[\mathbf{ab}] = \sum_{i,\,k} a_i b_k \sum_l \varepsilon_{ikl} \mathbf{e}_l = \sum_{i,\,k,\,l} \varepsilon_{ikl} a_i b_k \mathbf{e}_l.$$

Итак, векторное произведение может быть представлено в виде

$$[\mathbf{ab}] = \sum_{i,\,k,\,l} \varepsilon_{ikl} a_i b_k \mathbf{e}_l. \qquad \text{(VI. 29)}$$

Из 27 слагаемых этой суммы отличны от нуля только шесть. Выписав эти слагаемые, получим

$$[\mathbf{ab}] = a_1 b_2 \mathbf{e}_3 + a_2 b_3 \mathbf{e}_1 + a_3 b_1 \mathbf{e}_2 - a_3 b_2 \mathbf{e}_1 - a_2 b_1 \mathbf{e}_3 - a_1 b_3 \mathbf{e}_2.$$

Наконец, объединив слагаемые с одинаковыми ортами, придем к выражению

$$[\mathbf{ab}] = \mathbf{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \mathbf{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \mathbf{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1), \qquad \text{(VI. 30)}$$

которое может быть записано в виде определителя (см. Приложение VIII)

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(VI. 31)}$$

---

[1]) Так для краткости мы будем называть проекции вектора на координатные оси.

или, в обычных обозначениях,

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad \text{(VI. 32)}$$

Отметим, что согласно (VI. 29) l-я компонента векторного произведения определяется формулой

$$[\mathbf{ab}]_l = \sum_{i,\,k} \varepsilon_{ikl} a_i b_k = \sum_{i,\,k} \varepsilon_{lik} a_i b_k$$

(мы осуществили циклическую перестановку индексов при ε, которая, как известно, не изменяет числового значения этого символа). Чтобы иметь дело с более привычной последовательностью буквенных индексов, напишем выражение для i-й компоненты векторного произведения

$$[\mathbf{ab}]_i = \sum_{k,\,l} \varepsilon_{ikl} a_k b_l. \qquad \text{(VI. 33)}$$

Докажем с помощью соотношения (VI. 16) формулу (VI. 5) («бац минус цаб»). Для этого запишем векторное произведение в соответствии с формулой (VI. 29):

$$\mathbf{d} = [\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]] = \sum_{k,\,l,\,i} \varepsilon_{kli} a_k\, [\mathbf{bc}]_{\text{пр.}\,l} \mathbf{e}_i.$$

Теперь заменим $[\mathbf{bc}]_{\text{пр.}\,l}$ его выражением, получающимся из формулы (VI. 33):

$$\mathbf{d} = \sum_{k,\,l,\,i} \varepsilon_{kli} a_k \mathbf{e}_i \sum_{m,\,n} \varepsilon_{lmn} b_m c_n.$$

Осуществим циклическую перестановку индексов при символах ε, чтобы общий для них индекс l оказался на последнем месте. Кроме того, сгруппируем сомножители таким образом, чтобы суммирование по l осуществлялось в первую очередь:

$$\mathbf{d} = \sum_{i,\,k,\,m,\,n} \mathbf{e}_i a_k b_m c_n \sum_l \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{mnl} =$$

$$= \sum_{i,\,k,\,m,\,n} \mathbf{e}_i a_k b_m c_n (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})$$

(мы применили соотношение (VI. 16)). Дальнейшие преобразования дают

$$\mathbf{d} = \sum_{i,k} \mathbf{e}_i a_k \sum_m \delta_{im} b_m \sum_n \delta_{kn} c_n -$$

$$- \sum_{i,k} \mathbf{e}_i a_k \sum_n \delta_{in} c_n \sum_m \delta_{km} b_m = \sum_{i,k} \mathbf{e}_i a_k b_i c_k - \sum_{i,k} \mathbf{e}_i a_k c_i b_k =$$

$$= \sum_i \mathbf{e}_i b_i \sum_k a_k c_k - \sum_i \mathbf{e}_i c_i \sum_k a_k b_k = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}),$$

что и требовалось доказать.

3. Истинные векторы и псевдовекторы. Различают два вида векторов: *полярные* (или истинные) и *аксиальные* (или *осевые*), иначе называемые *псевдовекторами*[1]). При инверсии координатных осей, т. е. при изменении направлений координатных осей на обратные (рис. VI. 3) компоненты полярного вектора меняют знак. Это означает, что такой вектор при инверсии остается без изменений. Компоненты псевдовектора при инверсии знака не изменяют. Это означает, что псевдовектор при инверсии изменяет свое направление на обратное (т. е. меняет знак).

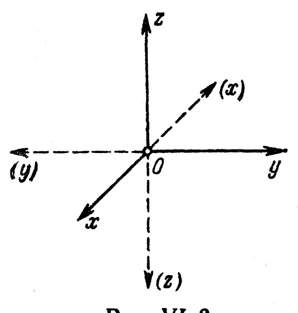


Рис. VI. 3

Из рис. VI. 3 видно, что при инверсии координатных осей правая система координат переходит в левую. Поэтому различие между полярным вектором и псевдовектором можно определить следующим образом: полярный вектор не изменяется при переходе от правой системы координат к левой, псевдовектор же при таком переходе изменяет направление на обратное. В Приложении X будет показано, что псевдовектор представляет собой антисимметричный тензор второго ранга.

Если оба вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ полярные, компоненты векторного произведения (VI. 30) при инверсии знака не изменяют (a_i и b_k в отдельности меняют знак, но их произведение остается без изменений). Следова-

---

[1]) «Псевдо» — первая составная часть сложных слов, означающая: ложный, мнимый (соответствует русскому «лже»).

тельно, векторное произведение полярных векторов является псевдовектором.

Скаляры также нужно делить на два вида: *истинные скаляры и псевдоскаляры.* Истинные скаляры не изменяются при переходе от правой системы координат к левой (или при инверсии координатных осей). К их числу относятся, например, масса, электрический заряд, температура. Псевдоскаляры при переходе от правой системы координат к левой меняют знак. К их числу принадлежат скалярные выражения, получающиеся в результате математических операций над векторами. Так, например, скалярное произведение (см. (VI. 27)) полярного и аксиального векторов при инверсии меняет знак и, следовательно, является не истинным скаляром, а псевдоскаляром.

Если векторы **a**, **b**, **c** полярные, то выражение (VI. 3) будет псевдоскаляром — при инверсии оно меняет знак. Таким образом, смешанное произведение полярных векторов есть псевдоскаляр.

4. Преобразования компонент векторов. Найдем формулы преобразования компонент вектора при переходе от одной системы координат к другой. Возьмем две системы прямоугольных координат K и K', задав их базисами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Произвольный вектор **a** можно представить в виде $\mathbf{a} = \sum \mathbf{e}_k a_k$, где a_k — проекции **a** на оси системы K, либо в виде $\mathbf{a} = \sum \mathbf{e}'_k a'_k$, где a'_k — проекции **a** на оси системы K'. Таким образом,

$$\sum_k \mathbf{e}'_k a'_k = \sum_k \mathbf{e}_k a_k. \qquad \text{(VI. 34)}$$

Умножим (VI. 34) на орт $\mathbf{e}'_i$:

$$\sum_k \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_k a'_k = \sum \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_k a_k. \qquad \text{(VI. 35)}$$

Согласно (VI. 11) $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_k = \delta_{ik}$. Следовательно, из трех слагаемых в левой части будет отлично от нуля только слагаемое с $k = i$, которое равно $\delta_{ii} a'_i = a'_i$.

Скалярное произведение $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_k$ равно косинусу угла между осью x'_i системы K' и осью x_k системы K. Обозначив этот косинус символом α_{ik}, можно написать

$$\alpha_{ik} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_k = \cos(x'_i, x_k) \quad (i, k = 1, 2, 3). \qquad \text{(VI. 36)}$$

Воспользовавшись этими обозначениями, соотношение (VI. 35) можно представить в виде

$$a'_i = \sum_k \alpha_{ik} a_k \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(VI. 37)}$$

Формула (VI. 37) позволяет по известным проекциям вектора **a** на оси системы K вычислить проекции **a** на оси системы K'. Чтобы получить формулы обратного преобразования (от K' к K), умножим (VI. 34) на орт $\mathbf{e}_i$. Повторив рассуждения, приведшие нас к формуле (VI. 37), получим, что

$$a_i = \sum_k \alpha_{ki} a'_k \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(VI. 38)}$$

Формулы (VI. 37) и (VI. 38) различаются лишь тем, что в одном случае суммирование производится по второму индексу при α_{ik}, в другом случае — по первому.

Девять величин α_{ik} не являются независимыми. Образуем сумму $\sum_m \alpha_{im}\alpha_{km}$. Учтя (VI. 36), получим

$$\sum_m \alpha_{im}\alpha_{km} = \sum_m (\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_m)(\mathbf{e}'_k \mathbf{e}_m).$$

Величину $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_m$ можно рассматривать как проекцию вектора $\mathbf{e}'_i$ на ось x_m системы K, аналогично $\mathbf{e}'_k \mathbf{e}_m$ есть проекция вектора $\mathbf{e}'_k$ на ось x_m. Таким образом, сумму, стоящую справа, можно представить в виде

$$\sum_m (\mathbf{e}'_i)_{\text{пр.}\, x_m} (\mathbf{e}'_k)_{\text{пр.}\, x_m} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_k = \delta_{ik}$$

(см. формулу (VI. 27)). Отсюда следует, что

$$\sum_m \alpha_{im}\alpha_{km} = \delta_{ik}. \qquad \text{(VI. 39)}$$

Аналогично можно доказать (рекомендуем это сделать читателю), что

$$\sum_m \alpha_{mi}\alpha_{mk} = \delta_{ik}. \qquad \text{(VI. 40)}$$

Преобразования (VI. 37) и (VI. 38) могут быть приняты в качестве определения вектора: *вектором называется совокупность величин* a_1, a_2, a_3, *которые при переходе от одной системы координат к другой*

преобразуются по формулам (VI. 37) *и* (VI. 38), *где* α_{ik} — *величины, определяемые формулой* (VI. 36).

Последнее определение вектора легко распространить на пространство любого числа измерений. Пусть имеется пространство n измерений. Возьмем в этом пространстве систему координат, оси которой взаимно перпендикулярны. Это означает, что орты осей $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ удовлетворяют условию (VI. 11). Тогда вектором в n-мерном пространстве (n-вектором) называется совокупность n величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по формулам (VI. 37) и (VI. 38). Немой индекс пробегает при суммировании в этом случае не 3, а n значений. Число уравнений в (VI. 37) и (VI.38) также будет не 3, а n.

Скалярное произведение векторов также легко обобщается на пространство n измерений. Аналогично (VI. 27) назовем скалярным произведением двух векторов с компонентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выражение

$$\mathbf{ab} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \qquad \text{(VI. 41)}$$

которое представляет собой инвариант. Векторы, скалярное произведение которых равно нулю, называются взаимно ортогональными (или взаимно перпендикулярными).

Понятие векторного произведения на пространства иного, чем три, числа измерений не распространяется.

Инверсию координатных осей (см. рис. VI. 3) можно рассматривать как преобразование от системы K к системе K', коэффициенты которого имеют значения

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k \end{cases}$$

или

$$\alpha_{ik} = -\delta_{ik}. \qquad \text{(VI. 42)}$$

Согласно формуле (VI. 37) компоненты вектора преобразуются при инверсии по закону

$$a'_i = -\sum_k \delta_{ik} a_k = -a_i,$$

т. е. изменяют знак на обратный (об этом была уже речь выше).

Найдем закон преобразования компонент векторного произведения при инверсии координатных осей. Напишем выражение (VI. 33) в системе координат K' (получающейся в результате инверсии осей системы K):

$$[\mathbf{ab}]'_i = \sum_{k,l} \varepsilon'_{ikl} a'_k b'_l = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} a'_k b'_l. \qquad (VI.43)$$

Мы воспользовались тем, что величины ε_{ikl} определяются одинаково для всех систем координат, вследствие чего при любых преобразованиях координат

$$\varepsilon'_{ikl} = \varepsilon_{ikl}. \qquad (VI.44)$$

Выразим в формуле (VI. 43) a'_k и b'_l через нештрихованные компоненты соответствующих векторов, воспользовавшись соотношением (VI. 37)

$$[\mathbf{ab}]'_i = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} \sum_m (-\delta_{km}) a_m \sum_p (-\delta_{lp}) b_p =$$

$$= \sum_{k,\,l,\,m,\,p} \varepsilon_{ikl} \delta_{km} \delta_{lp} a_m b_p.$$

Произведя суммирование по индексам m и p, получим

$$[\mathbf{ab}]'_i = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} a_k b_l.$$

В соответствии с (VI. 33) последнее выражение есть $[\mathbf{ab}]_i$. Таким образом, мы установили, что

$$[\mathbf{ab}]'_i = [\mathbf{ab}]_i,$$

т. е. что компоненты векторного произведения при инверсии не изменяются. Отсюда следует, что векторное произведение истинных векторов является псевдовектором.

Напишем смешанное произведение трех векторов. Согласно формулам (VI. 27) и (VI. 33)

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \sum_i a_i [\mathbf{bc}]_i = \sum_i a_i \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} b_k c_l =$$

$$= \sum_{i,\,k,\,l} \varepsilon_{ikl} a_i b_k c_l. \qquad (VI.45)$$

Выясним, как ведет себя эта величина при инверсии. В системе K' будем иметь

$$(\mathbf{a}[\mathbf{bc}])' = \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl} a'_i b'_k c'_l =$$

$$= \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl} \sum_m (-\delta_{im}) a_m \sum_p (-\delta_{kp}) b_p \sum_s (-\delta_{ls}) c_s =$$

$$= -\sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl} a_i b_k c_l = -(\mathbf{a}[\mathbf{bc}]).$$

Мы получили уже известный нам результат; смешанное произведение истинных векторов при инверсии меняет знак, т. е. является псевдоскаляром.

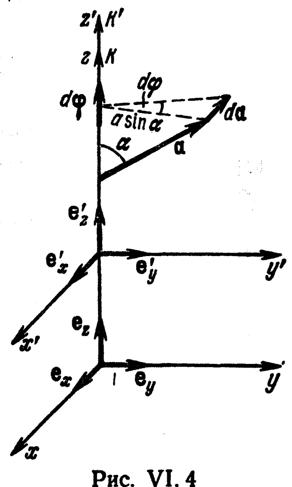


Рис. VI. 4

5. Приращение вектора при повороте. Найдем приращение, которое получает вектор $\mathbf{a}$ при повороте на бесконечно малый угол $d\boldsymbol{\varphi}$. Введем две системы координат K и K', которые выберем так, чтобы их оси z и z' совпадали с вектором $d\boldsymbol{\varphi}$ (рис. VI. 4). Пусть система K' повернется вместе с вектором $\mathbf{a}$ на угол $d\boldsymbol{\varphi}$ относительно системы K. При этом относительно системы K' вектор $\mathbf{a}$ остается неизменным, относительно же системы K вектор $\mathbf{a}$ получает приращение $d\mathbf{a}$.

Будем сначала предполагать, что начало вектора $\mathbf{a}$ помещается на оси z (рис. VI. 4). Если $\mathbf{a}$ лежит первоначально в плоскости yz, то приращение $d\mathbf{a}$ коллинеарно с осью x. Модуль этого приращения, как видно из рисучка, равен $a \sin\alpha \, d\varphi$. Из сказанного следует, что приращение вектора $\mathbf{a}$ может быть представлено в виде

$$d\mathbf{a} = [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{a}]. \qquad \text{(VI. 46)}$$

Докажем, что найденная нами формула остается справедливой при произвольном расположении вектора $\mathbf{a}$ относительно систем координат K и K'. Введем в рассмотрение орты $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ системы K и орты $\mathbf{e}'_x$, $\mathbf{e}'_y$, $\mathbf{e}'_z$ системы K'. Тогда вектор $\mathbf{a}$ можно задать

выражением

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x a_x + \mathbf{e}_y a_y + \mathbf{e}_z a_z \qquad \text{(VI. 47)}$$

либо выражением

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}'_x a'_x + \mathbf{e}'_y a'_y + \mathbf{e}'_z a'_z, \qquad \text{(VI. 48)}$$

где a_x, a_y, a_z — проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси системы K, a'_x, a'_y, a'_z — проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси системы K'.

При повороте вектора вместе с системой K' на угол $d\varphi$ вектор получает относительно K приращение, которое можно записать в виде приращения выражения (VI. 47):

$$d\mathbf{a} = \mathbf{e}_x\, da_x + \mathbf{e}_y\, da_y + \mathbf{e}_z\, da_z$$

либо в виде приращения выражения (VI. 48):

$$d\mathbf{a} = a'_x\, d\mathbf{e}'_x + a'_y\, d\mathbf{e}'_y + a'_z\, d\mathbf{e}'_z, \qquad \text{(VI. 49)}$$

где $d\mathbf{e}'_x$, $d\mathbf{e}'_y$, $d\mathbf{e}'_z$ — приращения ортов осей системы K', наблюдаемые в системе K (напомним, что проекции a'_x, a'_y, a'_z при повороте остаются неизменными).

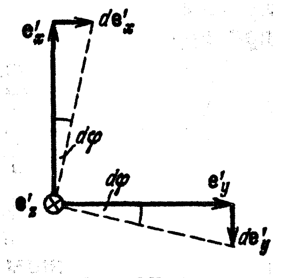


Рис. VI. 5

При выбранном нами направлении оси z' приращение орта $\mathbf{e}'_z$ равно нулю ($d\mathbf{e}'_z = 0$). На рис. VI. 5 показаны приращения $d\mathbf{e}'_x$ и $d\mathbf{e}'_y$, которые получают орты $\mathbf{e}'_x$ и $\mathbf{e}'_y$ при повороте системы координат K' на угол $d\varphi$. Из рисунка видно, что направление $d\mathbf{e}'_x$ совпадает с направлением орта $\mathbf{e}'_y$. Модуль же $d\mathbf{e}'_x$ равен $d\varphi$ [модуль (т. е. длина) любого орта равен единице]. Следовательно, приращение орта $\mathbf{e}'_x$, наблюдаемое в системе K, может быть представлено в виде

$$d\mathbf{e}'_x = \mathbf{e}'_y \cdot d\varphi.$$

Аналогичные рассуждения приводят к формуле

$$d\mathbf{e}'_y = -\,\mathbf{e}'_x \cdot d\varphi$$

(знак «—» вызван тем, что векторы $d\mathbf{e}'_y$ и $\mathbf{e}'_x$ направлены в противоположные стороны).

Подставив найденные нами значения приращений ортов в формулу (VI. 49), получим, что

$$d\mathbf{a} = (a'_x \mathbf{e}'_y - a'_y \mathbf{e}'_x)\, d\varphi.$$

Покажем, что найденное нами выражение эквивалентно векторному произведению $[d\varphi, \mathbf{a}]$. Для этого выразим последнее произведение через проекции перемножаемых векторов на оси системы K', учтя, что $d\varphi$ направлен по оси z'. В соответствии с формулой (VI. 32)

$$[d\varphi, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ 0 & 0 & d\varphi \\ a'_x & a'_y & a'_z \end{vmatrix} = (a'_x \mathbf{e}'_y - a'_y \mathbf{e}'_x)\, d\varphi.$$

Таким образом, мы пришли к формуле (VI. 46).

VII. Матрицы

Определение матрицы. В Приложении VI были получены формулы преобразования компонент вектора при переходе от системы координат K к системе K':

$$a'_i = \sum_k \alpha_{ik} a_k \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \text{(VII. 1)}$$

$$a_i = \sum_k \alpha_{ki} a'_k \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{(VII. 2)}$$

(см. формулы (VI. 37) и (VI. 38)).

Коэффициенты перехода можно записать в виде квадратной таблицы

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \text{(VII. 3)}$$

которая называется *матрицей преобразования*. Величины α_{ik} именуются *элементами матрицы*. Первый индекс указывает номер строки, в которой стоит данный элемент, второй индекс — номер столбца.

Условимся об обозначениях. Элементы матрицы мы будем обозначать строчными буквами с двумя индексами, а матрицу — соответствующей прописной буквой (например, элемент α_{ik}, матрица A[1])). Компоненты вектора будем обозначать строчными буквами

[1]) Так пишется прописная прямая греческая буква «альфа».

с одним индексом, а вектор — такой же строчной буквой, но прямого полужирного шрифта (например, a_i — компонента вектора, $\mathbf{a}$ — вектор).

Операцию (VII. 1) преобразования компонент вектора можно записать символически в виде умножения вектора на матрицу:

$$\mathbf{a}' = \mathrm{A}\mathbf{a}. \qquad \text{(VII.4)}$$

Коэффициенты обратного преобразования (VII. 2) образуют матрицу

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \text{(VII. 5)}$$

называемую *обратной матрицей.* Обозначив элементы обратной матрицы символом α'_{ik}, можно написать соотношение

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ki}. \qquad \text{(VII. 6)}$$

Матрица, получаемая из А заменой строк столбцами, называется *транспонированной* и обозначается $\tilde{\mathrm{A}}$. Если обозначить элементы транспонированной матрицы символом $\tilde{\alpha}_{ik}$, можно написать

$$\tilde{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki}. \qquad \text{(VII. 7)}$$

Из формул (VII. 6) и (VII. 7) следует, что матрица обратного преобразования (VII. 5) совпадает с транспонированной матрицей прямого преобразования (VII. 3):

$$\mathrm{A}^{-1} = \tilde{\mathrm{A}}. \qquad \text{(VII. 8)}$$

Соотношение (VII. 8) справедливо не для любых матриц[1]). Матрицы, удовлетворяющие условию (VII. 8), называются *ортогональными.*

Обратное преобразование (VII. 2) запишется символически в виде

$$\mathbf{a} = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{a}'. \qquad \text{(VII. 9)}$$

Не меняя формальной математической стороны дела, соотношения (VII. 4) и (VII. 9) (иными слова-

---

[1]) Вообще говоря, не всякая матрица имеет обратную. Матрица, для которой обратной не существует, называется особенной или вырожденной. Но даже если матрица не вырождена, ее обратная и транспонированная матрицы могут не совпадать.

ми, соотношения (VII. 1) и (VII. 2) можно рассматривать не как операции перехода от одной системы координат к другой, а как операции, преобразующие один вектор в другой, причем оба вектора рассматриваются в одной и той же системе координат. Имея в виду такую трактовку, запишем формулы преобразования следующим образом:

$$\mathbf{b} = \mathrm{A}\mathbf{a}, \qquad \text{(VII. 10)}$$

$$\mathbf{a} = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{b}. \qquad \text{(VII. 11)}$$

Таким образом, матрицу A можно рассматривать как линейный оператор, который, воздействуя на вектор **a**, превращает его в вектор **b**.

Напишем в явном виде преобразования (VII. 10) и (VII. 11), причем для большей общности будем считать, что векторы **a** и **b** определены не в трехмерном пространстве, а в пространстве n измерений. По аналогии с (VII. 1) и (VII. 2) получим

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{(VII. 12)}$$

$$a_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha'_{ik} b_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{(VII. 13)}$$

где α'_{ik} — элементы матрицы обратного преобразования (матрицы A^{-1}). Для ортогональной матрицы $\alpha'_{ik} = \alpha_{ki}$.

Матрицы A и A^{-1} теперь будут иметь n строк и n столбцов, например,

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad \text{(VII. 14)}$$

Матрица (VII. 14) является квадратной — число строк в ней равно числу столбцов. Кроме квадратных рассматриваются также прямоугольные матрицы, число строк которых m не равно числу столбцов n:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{(m, n)} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix}. \qquad \text{(VII. 15)}$$

Первый индекс при символе матрицы указывает число строк, второй — число столбцов. В случаях, когда это не сможет привести к недоразумениям, мы эти индексы будем опускать.

Итак, в общем случае под матрицей понимается совокупность $m \cdot n$ элементов, расположенных в виде прямоугольной таблицы. Элементами матрицы могут быть функции, числа либо иные величины, над которыми можно производить алгебраические операции. Матрица с m строками и n столбцами называется $(m \times n)$-матрицей, или матрицей порядка $m \times n$, или, наконец, матрицей размера $m \times n$. Матрицу порядка $m \times 1$, т. е. матрицу с одним столбцом, иногда называют просто столбцом. Матрицу порядка $1 \times n$, т. е. матрицу с одной строкой, иногда называют просто строкой.

Две матрицы A и B называются равными (A = B), если соответствующие элементы этих матриц равны друг другу ($\alpha_{ik} = \beta_{ik}$).

Матрицы A и B считаются отличающимися только знаком, (A = —B), если соответствующие элементы этих матриц связаны соотношением $\alpha_{ik} = -\beta_{ik}$.

Квадратная матрица (VII. 14) (т. е. матрица порядка $n \times n$) есть частный случай матрицы (VII. 15). Матрица, преобразующая вектор в пространстве n измерений в другой вектор в том же пространстве, очевидно, будет квадратной.

Если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \qquad \text{(VII. 16)}$$

матрица называется *симметричной*. Симметричная матрица, очевидно, совпадает со своей транспонированной

$$A_{\text{симм}} = \tilde{A}_{\text{симм}}. \qquad \text{(VII. 17)}$$

Квадратная матрица, элементы которой удовлетворяют условию

$$\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}, \qquad \text{(VII. 18)}$$

называется *антисимметричной* или *кососимметричной*. Антисимметричная матрица отличается от своей транспонированной только знаком:

$$A_{\text{антисимм}} = -\tilde{A}_{\text{антисимм}}. \qquad \text{(VII.19)}$$

Квадратная матрица, у которой отличны от нуля лишь элементы α_{ik} с одинаковыми значениями индексов i и k, называется *диагональной*. Диагональная матрица имеет вид

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}. \qquad \text{(VII. 20)}$$

Элементы этой матрицы можно представить следующим образом:

$$\lambda_{ik} = \lambda_k \delta_{ik}, \qquad \text{(VII. 21)}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера (см. (VI. 12)).

Если изменить систему координат (т. е. базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$), то компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (см. формулу (VII. 10)) станут другими. Изменятся также и элементы матрицы-оператора. Оказывается, что в некоторых случаях (в частности, в том случае, когда матрица A симметрична) можно так выбрать базис, что матрица A делается диагональной.

При переходе от одной системы координат к другой элементы матрицы меняются, однако остается неизменной сумма диагональных элементов, называемая *следом матрицы* (обозначается Sp A; немецкое Spur означает след). Таким образом, след матрицы одинаков во всех системах координат, т. е. является инвариантом:

$$\operatorname{Sp} A = \sum_i \alpha_{ii} = \text{inv}. \qquad \text{(VII. 22)}$$

Остается неизменным также определитель матрицы (см. (VIII. 3)):

$$\det \| \alpha_{ik} \| = \text{inv}. \qquad \text{(VII. 23)}$$

Назовем единичной матрицей E такую матрицу[1]), которая при умножении на вектор по правилу (VII. 10) дает тот же вектор

$$\mathbf{a} = \mathrm{E}\mathbf{a}.$$

Легко сообразить, что элементы единичной матрицы должны быть равны δ_{ik} (подстановка в (VII. 12)

[1]) Иногда единичную матрицу обозначают символом 1.

$\alpha_{ik} = \delta_{ik}$ приводит к соотношению $b_i = a_i$). Таким образом,

$$E = \| \delta_{ik} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}. \tag{VII. 24}$$

Отметим, что эта матрица является диагональной.

Алгебра матриц. Матрицы суть алгебраические объекты, над которыми можно совершать операции сложения, вычитания и умножения (операции деления матриц не существует).

Суммой двух матриц A и B называется матрица $\Gamma = A + B$ [1]), элементы которой определяются формулой

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik}. \tag{VII. 25}$$

Разностью матриц называется матрица $\Gamma = A - B$ с элементами

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik} - \beta_{ik}. \tag{VII. 26}$$

Очевидно, что складывать и вычитать можно только матрицы одинакового порядка, т. е. матрицы с одинаковым числом строк и одинаковым числом столбцов.

Произведением матрицы A на скаляр η называется матрица $B = \eta A$ с элементами

$$\beta_{ik} = \eta \alpha_{ik}. \tag{VII. 27}$$

Перейдем к рассмотрению перемножения матриц. Предположим, что действие матрицы A на вектор **a** превращает его в вектор **b**, а действие матрицы B на вектор **b** превращает его в вектор **c**. Естественно назвать произведением матриц A и B такую матрицу Γ, которая, действуя на вектор **a**, превращает его в вектор **c**. Таким образом,

$$\mathbf{b} = A\mathbf{a}, \quad \text{т. е.} \quad b_m = \sum_k \alpha_{mk} a_k,$$

$$\mathbf{c} = B\mathbf{b} = BA\mathbf{a}, \quad \text{т. е.} \quad c_l = \sum_m \beta_{lm} b_m = \sum_m \beta_{lm} \sum_k \alpha_{mk} a_k = \sum_k a_k \sum_m \beta_{lm} \alpha_{mk}.$$

---

[1]) Произносится: матрица «гамма» равна матрице «альфа» плюс матрица «бета» (B — прописное греческое «бета», Γ — прописное греческое «гамма»).

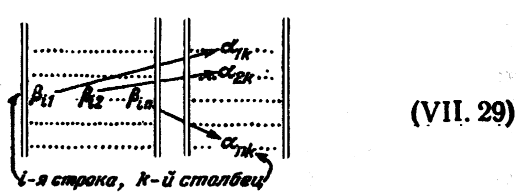
С другой стороны,

$$\mathbf{c} = \Gamma \mathbf{a}, \quad \text{т. е.} \quad c_i = \sum_k \gamma_{ik} a_k.$$

Сравнение обеих формул для **c** и c_i приводит к правилу умножения матриц:

$$\Gamma = \mathrm{BA} \quad \text{означает, что} \quad \gamma_{ik} = \sum_m \beta_{im} \alpha_{mk}. \qquad \text{(VII. 28)}$$

Согласно этому правилу для получения элемента матрицы Г, стоящего на пересечении i-й строки и k-го столбца, нужно умножить каждый элемент i-й строки матрицы В на соответствующий элемент k-го столбца матрицы А и все произведения сложить. Это можно пояснить следующей схемой:



(VII. 29)

Заметим, что произведение матриц, вообще говоря, не коммутативно, т. е.

$$\mathrm{BA} \neq \mathrm{AB}.$$

Матрицы, для которых выполняется условие

$$\mathrm{BA} = \mathrm{AB}, \qquad \text{(VII. 30)}$$

называются *коммутирующими*.

Легко показать, что произведение матриц ассоциативно:

$$(\Gamma\mathrm{B})\,\mathrm{A} = \Gamma\,(\mathrm{BA}). \qquad \text{(VII. 31)}$$

Это означает, что умножив сначала В на Г, а затем А на (ГВ), мы получим тот же результат, какой получился бы при перемножении сначала матриц А и В и последующем умножении матрицы (ВА) на Г. Действительно, по правилу перемножения матриц

$$\{(\Gamma\mathrm{B})\,\mathrm{A}\}_{ik} = \sum_m (\Gamma\mathrm{B})_{im} \alpha_{mk} = \sum_m \Big(\sum_l \gamma_{il} \beta_{lm}\Big) \alpha_{mk} =$$

$$= \sum_l \gamma_{il} \Big(\sum_m \beta_{lm} \alpha_{mk}\Big) = \sum_l \gamma_{il} (\mathrm{BA})_{lk} = \{\Gamma(\mathrm{BA})\}_{ik}$$

(в ходе преобразований мы изменили порядок суммирования по индексам m и l). Таким образом, свойство (VII. 31) доказано.

Можно умножать друг на друга и неквадратные (прямоугольные) матрицы. Как следует из схемы (VII. 29), перемножение таких матриц возможно только в том случае, когда число столбцов матрицы B (второй матрицы[1])) совпадает с числом строк матрицы A (первой матрицы). Матрица-произведение будет иметь столько строк, сколько их имеет вторая матрица (матрица B) и столько столбцов, сколько их имеет первая матрица (матрица A). Поясним это следующим примером:

$$\begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \sum \beta_{1k}\alpha_{k1} & \sum \beta_{1k}\alpha_{k2} & \sum \beta_{1k}\alpha_{k3} \\ \sum \beta_{2k}\alpha_{k1} & \sum \beta_{2k}\alpha_{k2} & \sum \beta_{2k}\alpha_{k3} \end{Vmatrix}.$$

Если вторая матрица квадратная, т. е. имеет порядок $n \times n$, а первая матрица содержит только один столбец с n элементами, то матрица-произведение также состоит из одного столбца с n элементами:

$$\begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum \beta_{1k}\alpha_k \\ \sum \beta_{2k}\alpha_k \\ \dots \\ \sum \beta_{nk}\alpha_k \end{Vmatrix}. \qquad \text{(VII. 32)}$$

При умножении матрицы с одним столбцом на матрицу с одной строкой получается просто число (или функция, если элементами матрицы являются функции):

$$\| \beta_1 \; \beta_2 \; \dots \; \beta_n \| \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Vmatrix} = \sum_k \beta_k \alpha_k. \qquad \text{(VI. 33)}$$

---

[1]) В произведении матриц BA первым сомножителем нужно считать матрицу A, стоящую справа. На нее умножается вектор в первую очередь, а затем уже на результат воздействует вторая матрица B.

В частности, если в качестве матрицы $\|\beta\|$ взять транспонированную матрицу $\|\alpha\|$, то (VII.33) переходит в

$$\|\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\| \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{Vmatrix} = \sum_k \alpha_k^2.$$

Следовательно, для матрицы $A_{(n,\,1)}$, имеющей только один столбец, справедливо соотношение

$$\tilde{A}_{(n,\,1)} A_{(n,\,1)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2. \qquad \text{(VII. 34)}$$

Если в качестве элементов матрицы с одним столбцом взять составляющие вектора $\mathbf{a}$, а в качестве квадратной матрицы — матрицу-оператор A, то соотношение (VII.32) примет вид

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{Vmatrix}, \qquad \text{(VII. 35)}$$

где $b_i = \sum_k a_{ik} a_k$ (ср. с (VII.12)). Легко заметить, что соотношение (VII.35) эквивалентно соотношению (VII.10). Следовательно, вектор можно представить как матрицу с одним столбцом.

Рассмотрим произведение единичной матрицы E на произвольную матрицу A. Согласно правилу (VII.28)

$$(AE)_{ik} = \sum_m A_{im} \delta_{mk}$$

(δ_{mk} — элементы матрицы E). В этой сумме отличным от нуля будет только одно слагаемое, у которого $m = k$. Следовательно, $(AE)_{ik} = A_{ik}$. Аналогично

$$(EA)_{ik} = \sum_m \delta_{im} A_{mk} = A_{ik}.$$

Из сказанного следует, что умножение на единичную матрицу (при любом порядке сомножителей) не изменяет матрицы A:

$$EA = AE = A. \qquad \text{(VII. 36)}$$

Последнее соотношение означает, что единичная матрица коммутирует с любой матрицей A.

Очевидно, что, применив к какому-либо вектору сначала преобразование А, а затем обратное ему преобразование A^{-1}, мы должны вернуться к исходному вектору

$$\mathbf{a} = A^{-1}A\mathbf{a}. \qquad \text{(VII. 37)}$$

Отсюда вытекает, что произведение прямой и обратной матриц должно быть равно единичной матрице: $A^{-1}A = E$ [1]). Произведение прямой и обратной матриц, очевидно, коммутативно, следовательно,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \qquad \text{(VII. 38)}$$

Записав элементы произведения матриц А и A^{-1} по формуле (VII. 28), можно найти соотношение между элементами прямой и обратной матриц:

$$\sum_m \alpha'_{im}\alpha_{mk} = \sum_m \alpha_{im}\alpha'_{mk} = \delta_{ik}. \qquad \text{(VII. 39)}$$

Для ортогональной матрицы, т. е. матрицы, удовлетворяющей условию (VII. 8), $\alpha'_{ik} = \alpha_{ki}$ (см. (VII. 6)). Произведя в (VII. 39) такую замену, получим

$$\sum_m \alpha_{mi}\alpha_{mk} = \delta_{ik}, \qquad \text{(VII. 40)}$$

$$\sum_m \alpha_{im}\alpha_{km} = \delta_{ik}. \qquad \text{(VII. 41)}$$

Таким образом, элементы ортогональной матрицы удовлетворяют соотношениям (VII. 39) и (VII. 40) (ср. с формулами (VI. 39) и (VI. 40)).

VIII. Определители

Пусть нам дана квадратная матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad \text{(VIII. 1)}$$

Образуем из элементов этой матрицы выражение

$$\varepsilon_{ik \dots m} a_{1i} a_{2k} \dots a_{nm}, \qquad \text{(VIII. 2)}$$

---

[1]) Из этого соотношения становится понятным обозначение A^{-1}, употребляемое для обратной матрицы (Е — «единица»).

где $i, k, \ldots, m$ — перестановка из чисел $1, 2, \ldots, n$, а $\varepsilon_{ik\ldots m}$ — величина, равная $+1$, если число беспорядков[1]) в перестановке $i, k, \ldots, m$ является четным, и -1, если число беспорядков нечетное (ср. с (VI. 15)). Число перестановок из n чисел, как известно, равно $n!$. Следовательно, можно составить $n!$ различных выражений вида (VIII. 2).

Сумма всех выражений вида (VIII. 2) обозначается символами

$$D_n = D(A) = \det\|a_{ik}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(ik\ldots m)} \varepsilon_{ik\ldots m} a_{1i} a_{2k} \ldots a_{nm} \qquad \text{(VIII. 3)}$$

и называется *определителем* (или *детерминантом*), соответствующим матрице (VIII. 1). Сумма (VIII. 3) берется по всем перестановкам чисел $i, k, \ldots, m$. Следовательно, она содержит $n!$ слагаемых.

Если дополнить определение $\varepsilon_{ik\ldots m}$ условием, чтобы этот символ обращался в нуль при совпадении значений хотя бы двух из n индексов, детерминант $D(A)$ можно определить как сумму

$$\sum_{i, k, \ldots, m=1}^{n} \varepsilon_{ik\ldots m} a_{1i} a_{2k} \ldots a_{nm}, \qquad \text{(VIII. 4)}$$

в которой все индексы $i, k, \ldots, m$ пробегают значения от 1 до n.

Из (VIII. 3) следует, что определитель можно записать в виде таблицы, аналогичной (VIII. 1), с тем отличием, что по бокам вместо двойных вертикальных линий ставятся одинарные.

Число строк (или столбцов) определителя называется его *порядком*.

Отметим, что определитель диагональной матрицы (VII. 20) равен произведению ее диагональных элементов:

$$\det\|\lambda_k \delta_{ik}\| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n, \qquad \text{(VIII. 5)}$$

---

[1]) Напомним, что беспорядком в перестановке называется тот факт, что большее число стоит впереди меньшего.

а определитель единичной матрицы равен единице:

$$D(E) = 1. \qquad \text{(VIII. 6)}$$

Поясним сказанное на примере определителя третьего порядка:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Из вторых индексов элементов этого определителя можно сделать $3! = 6$ перестановок:

123	0	беспорядков	+
231	2	безпорядка	+
312	2	беспорядка	+
321	3	беспорядка	−
213	1	беспорядок	−
132	1	беспорядок	−

Согласно формуле (VIII. 4) определителем третьего порядка будет выражение

$$D_3 = a_{11}a_{23}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Если в определителе n-го порядка вычеркнуть i-ю строку и k-й столбец, получится определитель $(n-1)$-го порядка, который называется *минором* исходного определителя, соответствующим элементу a_{ik}. Этот минор принято обозначать символом Δ_{ik}. Величину

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik} \qquad \text{(VIII. 7)}$$

называют *алгебраическим дополнением* элемента a_{ik}.

Свойства определителей. Приведем без доказательства основные свойства определителей.

1. При замене строк столбцами величина определителя не изменяется:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

или, в более компактной записи,

$$\det\|a_{ik}\| = \det\|a_{ki}\|. \qquad \text{(VIII. 8)}$$

Замена строк столбцами называется *транспонированием*. Определитель, в котором призведена такая замена, называют *транспонированным*. Таким образом, можно сказать, что транспонированный определитель равен исходному.

Из свойства 1 вытекает, что определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы:

$$D(\tilde{A}) = D(A). \qquad \text{(VIII. 9)}$$

Действительно, эти определители отличаются только заменой строк на столбцы, что не изменяет величины определителя.

2. При перестановке двух строк или двух столбцов изменяется лишь знак определителя.

3. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю (это следует из свойства 2).

4. Определитель является линейной формой[1]) элементов какой-нибудь строки или какого-либо столбца:

$$\det\|a_{ik}\| = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}a_{ik} \quad \text{(линейная форма элементов } i\text{-й строки)} \qquad \text{(VIII. 10)}$$

либо

$$\det\|a_{ik}\| = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}a_{ik} \quad \text{линейная форма элементов } k\text{-го столбца),} \qquad \text{(VIII. 11)}$$

причем коэффициентами A_{ik} линейных форм (VIII. 10) и (VIII. 11) являются алгебраические дополнения (VIII. 6) соответствующих элементов.

---

[1]) Линейной формулой переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется линейная однородная функция этих переменных, т. е. выражение

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

5. Если элементы одной строки (или столбца) умножить на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) и полученные произведения сложить, то сумма будет равна нулю (эта сумма представляет собой определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами; см. свойство 3).

Свойства 4 и 5 можно объединить в виде соотношений:

$$\begin{aligned} \sum_k A_{ik}a_{mk} &= \det\|a_{ik}\|\cdot\delta_{im}, \\ \sum_i A_{ik}a_{im} &= \det\|a_{ik}\|\cdot\delta_{km}. \end{aligned} \qquad \text{(VIII. 12)}$$

Из свойства 4 непосредственно вытекают еще два свойства (6 и 7):

6. Если все элементы некоторой строки (или столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \beta a_{1k} & \ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha a_{i1} & \ldots & \alpha\beta a_{ik} & \ldots & \alpha a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & \beta a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha\beta \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad \text{(VIII. 13)}$$

7. Если элементы некоторой строки (или столбца) являются суммой двух (или большего числа) слагаемых, то определитель равен сумме определителей, в которых элементами данной строки (данного столбца) служат соответствующие слагаемые, например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a'_{1k}+a''_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a'_{2k}+a''_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a'_{nk}+a''_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a'_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a'_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a'_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a''_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a''_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a''_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad \text{(VIII. 14)}$$

8. Значение определителя не изменится, если к элементам некоторой строки (или столбца) прибавить

соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель.

Это свойство вытекает из свойств 7, 6 и 3.

9. Произведением двух определителей одинакового порядка $\det\|a_{ik}\|$ и $\det\|b_{ik}\|$ является определитель того же порядка $\det\|c_{ik}\|$, элементы которого выражаются формулами

$$c_{ik}=\sum_{m} a_{im}b_{mk}. \tag{VIII. 15}$$

Сравнение этой формулы с формулой (VII. 28) показывает, что определители перемножаются так же, как и соответствующие матрицы. Следовательно, определитель матрицы-произведения совпадает с произведением определителей матриц-сомножителей.

Из свойства 9 вытекает, что определитель ортогональной матрицы равен ± 1. Действительно, для ортогональной матрицы $\tilde{A}=A^{-1}$ (см. (VII. 8)), вследствие чего $A\tilde{A}=E$. Согласно сказанному выше

$$D(A)D(\tilde{A})=D(E)=1$$

(см. (VIII. 6)). Но в соответствии с (VIII. 9) $D(\tilde{A})=$ $=D(A)$, так что можно написать

$$[D(A)]^2=1,$$

откуда

$$D(A)=\pm 1. \tag{VIII. 16}$$

Системы линейных неоднородных уравнений. Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n.
\end{aligned}$$

Эту систему можно записать в виде одного выражения

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k=b_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{VIII. 17}$$

Видно, что коэффициенты при неизвестных образуют квадратную матрицу, аналогичную матрице

(VIII. 1). Допустим, что определитель этой матрицы (мы будем его называть определителем системы) отличен от нуля

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad \text{(VIII. 18)}$$

Умножим первое из уравнений (VIII. 17) на A_{1m} — алгебраическое дополнение элемента a_{1m}, второе уравнение — на A_{2m}, ..., n-е уравнение — на A_{nm} и сложим вместе получившиеся выражения. В результате получим

$$\sum_{i=1}^{n} A_{im} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \sum_{i=1}^{n} A_{im}b_i.$$

Поменяем порядок суммирования в левой части равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} A_{im}a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} A_{im}b_i.$$

Согласно второй из формул (VIII. 12) $\sum_{i=1}^{n} A_{im}a_{ik} = \det\|a_{ik}\|\delta_{mk} = D\delta_{mk}$, где D — определитель системы. Следовательно, полученное соотношение можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} x_k D\delta_{mk} = \sum_{i=1}^{n} A_{im}b_i.$$

Просуммировав слева по k, получим произведение x_mD. Сравнение суммы, стоящей справа, с формулой (VIII. 11) позволяет сделать вывод, что эта сумма представляет собой определитель, который получается из определителя (VIII. 18) заменой элементов m-го столбца свободными членами системы (VIII. 17). Обозначив этот определитель символом $D^{(m)}$, можно написать, что

$$x_mD = D^{(m)},$$

откуда

$$x_k = \frac{D^{(k)}}{D}$$

(замена m на k осуществлена для того, чтобы индекс при x в данной формуле и формуле (VIII. 17) обозначался одной и той же буквой).

Мы пришли к *теореме Крамера*, которая гласит: *если определитель системы отличен от нуля, то она имеет одно определенное решение, причем значение неизвестного x_k равно дроби, знаменателем которой является определитель системы D, а числителем — определитель $D^{(k)}$, получающийся из D заменой элементов k-го столбца свободными членами системы*:

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_{ik} b_i}{D} = \frac{D^{(k)}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}. \qquad \text{(VIII. 19)}$$

Решение системы уравнений (VIII. 17) можно сделать очень наглядным, воспользовавшись следующим представлением. Неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно рассматривать как компоненты некоторого вектора $\mathbf{x}$ в пространстве n измерений, а свободные члены $b_1, b_2, \dots, b_n$ — как компоненты заданного вектора $\mathbf{b}$. Тогда систему (VIII. 17) можно символически представить в виде соотношения

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \text{(VIII. 20)}$$

где A — матрица, составленная из коэффициентов уравнений (VIII. 17):

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Действительно, раскрыв соотношение (VIII. 20) по формуле (VII. 12), получим n уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

совпадающих с системой (VIII. 17).

Следовательно, задачу нахождения неизвестных x_i можно сформулировать следующим образом: даны матрица A и вектор $\mathbf{b}$ в пространстве n измерений; требуется найти такой вектор $\mathbf{x}$, который, будучи умножен на матрицу A, преобразуется в заданный вектор $\mathbf{b}$.

Умножим уравнение (VIII. 20) на матрицу A^{-1}. Тогда слева получится искомый вектор $\mathbf{x}$ (см. формулу (VII. 37)) и мы придем к соотношению

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}. \qquad \text{(VIII. 21)}$$

Таким образом, для нахождения решений системы уравнений (VIII. 17) нужно поступить следующим образом: найти матрицу, обратную матрице системы, и подставить элементы этой матрицы в формулы

$$x_k = \sum_i a'_{ki} b_i \qquad \text{(VIII. 22)}$$

(см. формулы (VII. 11) и (VII. 13)).

Сопоставив формулы (VIII. 19) и (VIII. 22), мы приходим к выводу, что элементы обратной матрицы определяются выражениями

$$a'_{ki} = \frac{A_{ik}}{D}. \qquad \text{(VIII. 23)}$$

Укажем еще одну форму записи рассмотренных нами соотношений. Представив векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ в виде матриц с n строками и только одним столбцом, систему уравнений (VIII. 17) можно записать в виде

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{Vmatrix} \qquad \text{(VIII. 24)}$$

или, кратко,

$$A_{(n,\,n)} \cdot X_{(n,\,1)} = B_{(n,\,1)} \qquad \text{(VIII. 25)}$$

(ср. с (VII. 35)).

Системы линейных однородных уравнений. Система уравнений (VIII. 17), у которой все свободные члены b_i равны нулю, называется однородной. Таким образом, однородная система имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(VIII. 26)}$$

(мы рассматриваем только системы, у которых число уравнений равно числу неизвестных).

Если определитель этой системы отличен от нуля, то согласно теореме Крамера система имеет одно определенное решение, которое в данном случае будет нулевым:

$$x_k = \frac{\sum_i A_{ik} b_i}{D} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(см. (VIII. 19)).

Следовательно, для того чтобы однородная система уравнений имела ненулевое решение, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю. Можно доказать, что это условие является не только необходимым, но и достаточным.

Чтобы иметь возможность рассказать о характере решений системы (VIII. 26), нужно познакомиться с понятием ранга матрицы. Если число строк m не равно числу столбцов n матрицы, для нее нельзя составить определитель (VIII. 4). Однако, вычеркивая из матрицы некоторые строки и столбцы, можно из оставшихся строк и столбцов составить определитель. Полученные таким способом определители называются *входящими в состав матрицы*. Наивысший возможный порядок этих определителей равен минимальному из чисел m и n, определяющих размер матрицы, а наименьший порядок этих определителей равен единице, причем определители первого порядка суть элементы матрицы.

Предположим, что все определители порядка l, входящие в состав матрицы, равны нулю. Легко сообразить, что тогда и все определители порядка $(l+1)$ также равны нулю (это вытекает из свойства 4 определителей). Следовательно, если все определители некоторого порядка l, входящие в состав матрицы, равны нулю, то и все определители более высокого порядка также равны нулю.

Наивысший порядок отличного от нуля определителя, входящего в состав матрицы, называется ее *рангом*. Таким образом, тот факт, что ранг матрицы равен r, означает, что среди определителей порядка r, входящих в состав матрицы, имеется хотя бы один от-

личный от нуля; определители же более высокого порядка все равны нулю.

Понятие ранга применимо, разумеется, и к квадратной матрице. Так, например, при соблюдении условия (VIII. 18) ранг матрицы, составленной из коэффициентов неоднородной системы уравнений (VIII. 17), равен n.

Для того чтобы однородная система (VIII. 26) имела ненулевое решение, требуется равенство нулю ее определителя. Иными словами, необходимо, чтобы ранг матрицы, составленной из коэффициентов системы, был меньше n. Пусть ранг матрицы системы равен r $(1 \leqslant r < n)$. В этом случае существует $n - r$ линейно независимых решений

$$x_1^{(\alpha)},\ x_2^{(\alpha)},\ \ldots,\ x_n^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ n - r).$$

Наиболее общим решением будут значения неизвестных, определяемые выражениями

$$x_i = \sum_{\alpha} c_\alpha x_i^{(\alpha)} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ n), \qquad \text{(VIII. 27)}$$

где c_α — произвольные постоянные.

В частном случае, когда ранг матрицы системы $r = n - 1$, имеется только одно линейно-независимое решение. Можно доказать, что этим решением будут значения неизвестных

$$x_1 = cA_{k1}, \quad x_2 = cA_{k2}, \ \ldots, \ x_n = cA_{kn}, \qquad \text{(VIII. 28)}$$

где A_{ki} — алгебраическое дополнение элемента a_{ki} в определителе системы D, c — произвольная постоянная; k выбирается так, чтобы хотя бы одно из A_{ki} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ было отлично от нуля. Значения A_{ki}, получающиеся при разном выборе k, отвечающем указанному условию, отличаются друг от друга на общий множитель, который может быть включен в постоянную c. Таким образом, от выбора k вид решения (VIII.28) не зависит.

Пусть некоторая совокупность значений $x_i = q_i$ удовлетворяет системе (VIII. 26). Легко заметить, что значения $x_i = \lambda q_i$ (λ — произвольная постоянная) также удовлетворяют системе. Этим объясняется наличие множителя c в формулах (VIII. 28). Из сказанного следует, что системой (VIII. 26) однозначно определяются только отношения x_i/x_k, сами же значе-

ния x_i определяются с точностью до произвольного множителя.

Задаче о решении системы однородных уравнений можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Совокупность величин $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем рассматривать как n-вектор $\mathbf{x}$, аналогично совокупность величин $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ будем рассматривать как n-вектор $\mathbf{a}_i$ (таких векторов будет n). Тогда систему (VIII. 26) можно представить в виде

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(см. формулу (VI. 41)), а саму задачу сформулировать так: в пространстве n измерений заданы n векторов $\mathbf{a}_i$. Требуется найти такой вектор $\mathbf{x}$, который был бы перпендикулярен ко всем векторам $\mathbf{a}_i$.

Очевидно, что умножение вектора $\mathbf{x}$ на скаляр c не нарушает его ортогональности к векторам $\mathbf{a}_i$. Поэтому неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяются системой (VIII. 26) с точностью до произвольного множителя c, так что значение одного из неизвестных можно выбрать произвольно (например, принять $x_1 = 1$); тогда значения остальных неизвестных определятся однозначно (они будут выражены через x_1).

IX. Квадратичные формы

Квадратичной формой f от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется однородный многочлен второй степени от этих переменных. Такой многочлен можно записать в виде

$$f = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k, \tag{IX. 1}$$

где

$$a_{ik} = a_{ki} \tag{IX. 2}$$

суть постоянные величины, которые могут быть как вещественными, так и комплексными. Если все коэффициенты a_{ik} вещественны, то квадратичная форма называется *вещественной*. Если же хотя бы один из коэффициентов является комплексным, то квадратичная форма называется *комплексной*.

Вещественная квадратичная форма называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любых вещественных значений пере-

менных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю, эта форма имеет положительные (отрицательные) значения.

В дальнейшем мы будем рассматривать только вещественные квадратичные формы.

Симметричная матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad \text{(IX. 3)}$$

составленная из коэффициентов многочлена (IX. 1), называется *матрицей квадратичной формы*. Очевидно, что квадратичная форма вполне определяется своей матрицей.

Определитель

$$D(A) = \det \| a_{ik} \|, \qquad \text{(IX. 4)}$$

составленный из коэффициентов квадратичной формы, называется ее *дискриминантом*.

Квадратичную форму можно представить в виде произведения трех матриц:

$$f = \| x_1 x_2 \ldots x_n \| \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \tilde{X} A X, \qquad \text{(IX. 5)}$$

где X — матрица с одним столбцом, $\tilde{X}$ — транспонированная с ней матрица. Действительно, произведение матрицы с одним столбцом на квадратную матрицу представляет собой матрицу с одним столбцом (см. (VII. 32)), элементы которой в рассматриваемом нами случае равны

$$\sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Произведение же матрицы с одним столбцом на матрицу с одной строкой есть просто функция (см. (VII. 33)). В данном случае это — функция

$$\sum_i x_i \sum_k a_{ik} x_k .$$

Видно, что последнее выражение тождественно с выражением (IX. 1).

Квадратичная форма вида

$$f_{\text{кан}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2, \qquad \text{(IX. 6)}$$

не содержащая членов с произведениями различных переменных, называется *канонической*. Такая форма имеет диагональную матрицу и поэтому называется также диагональной квадратичной формой. Очевидно, что если все λ_k больше (меньше) нуля, форма (IX. 6) будет положительно определенной (отрицательно определенной).

Всякая квадратичная форма при помощи неособенного линейного преобразования[1]) переменных может быть приведена к диагональному виду. Перейдем от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к новым переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$, связанным с прежними переменными, с помощью линейных соотношений

$$x_i = \sum_k b_{ik} y_k. \qquad \text{(IX. 7)}$$

Рассматривая совокупность величин x_i и совокупность величин y_k как матрицы с одним столбцом, формулу (IX. 7) можно записать в виде

$$X = BY, \qquad \text{(IX. 8)}$$

где B — матрица линейного преобразования, элементами которой являются коэффициенты b_{ik}.

Подставив значения x_i, определяемые соотношениями (IX. 7), в формулу (IX. 1), найдем выражение квадратичной формы в новых переменных:

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} \sum_l b_{il} y_l \sum_m b_{km} y_m = \sum_{l,m} y_l y_m \sum_{i,k} a_{ik} b_{il} b_{km} = \sum_{l,m} c_{lm} y_l y_m, \qquad \text{(IX. 9)}$$

где

$$c_{lm} = \sum_{i,k} a_{ik} b_{il} b_{km}. \qquad \text{(IX. 10)}$$

Легко убедиться в том, что из условия $a_{ik} = a_{ki}$ вытекает $c_{lm} = c_{ml}$.

---

[1]) Неособенным называется такое линейное преобразование B (B — матрица), определитель которого отличен от нуля: $D(B) \neq 0$.

Запишем выражение (IX. 10) следующим образом:

$$c_{lm} = \sum_{i} b_{il} \sum_{k} a_{ik} b_{km} = \sum_{i} \tilde{b}_{li} \sum_{k} a_{ik} b_{km}$$

(мы заменили элементы матрицы B соответствующими элементами транспонированной матрицы $\tilde{B}$; см. формулу (VII. 7)). Согласно (VII. 28) $\sum_{k} a_{ik} b_{km}$ представляет собой $(AB)_{im}$ — элемент матрицы, получающейся в результате перемножения матриц B и A. Аналогично $\sum_{i} \tilde{b}_{li}(AB)_{im}$ представляет собой $(\tilde{B}AB)_{lm}$ — элемент матрицы, получающейся в результате перемножения матриц (AB) и $\tilde{B}$. Следовательно, матрица C, элементы которой определяются формулой (IX. 10), может быть представлена в виде

$$C = \tilde{B}AB. \qquad \text{(IX. 11)}$$

В соответствии с (VIII. 15) определитель $D(C)$ матрицы C равен

$$D(C) = D(\tilde{B})\,D(A)\,D(B).$$

Поскольку матрицы $\tilde{B}$ и B отличаются заменой столбцов строками, а определитель при такой замене не изменяется (см. (VIII. 8)), то $D(\tilde{B}) = D(B)$ и можно написать

$$D(C) = D(A)\,[D(B)]^2. \qquad \text{(IX. 12)}$$

Таким образом, при линейном преобразовании переменных дискриминант квадратичной формы умножается на квадрат определителя преобразования от новых переменных к первоначальным.

Если преобразование B ортогонально (это означает, что коэффициенты b_{ik} удовлетворяют условиям (VII. 40) и (VII. 41)), то транспонированная матрица совпадает с обратной: $\tilde{B} = B^{-1}$ (см. (VII. 8)). Поэтому в случае ортогонального преобразования формула (IX. 11) выглядит следующим образом:

$$C = B^{-1}AB. \qquad \text{(IX. 13)}$$

Матрица C, определяемая соотношением (IX. 13), представляет собой матрицу квадратичной формы в новых переменных y_k. Попытаемся найти такое

ортогональное преобразование B, чтобы матрица C была диагональной, т. е. имела вид

$$C = \Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix} \qquad \text{(IX. 14)}$$

Тогда квадратичная форма в новых переменных y_k будет иметь канонический вид (см. формулу (IX. 6)).

Умножим обе части формулы (IX. 13) на B. Поскольку $BB^{-1} = E$, а умножение на единичную матрицу не изменяет второго сомножителя (см. (VII. 36)), мы придем к соотношению

$$BC = AB$$

или

$$\sum_m b_{im} c_{mk} = \sum_m a_{im} b_{mk} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n). \qquad \text{(IX. 15)}$$

В соответствии с (IX. 14) элементы c_{mk} могут быть представлены в виде $c_{mk} = \lambda_m \delta_{mk}$. Подставив это значение c_{mk} в формулу (IX. 15), получим

$$\sum_m b_{im} \lambda_m \delta_{mk} = \sum_m a_{im} b_{mk} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

В сумме, стоящей слева, будет отлично от нуля лишь слагаемое с $m = k$, которое равно $b_{ik}\lambda_k$. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$b_{ik}\lambda_k = \sum_m a_{im} b_{mk} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n). \qquad \text{(IX. 16)}$$

Последнее выражение можно рассматривать как совокупность n^2 уравнений с n^2 неизвестными b_{ik}. Эти уравнения можно подразделить на n групп (отличающихся значениями индекса k). Каждая из этих групп состоит из n уравнений, отличающихся значениями индекса i. Перенеся в (IX. 16) все члены в одну сторону, k-ю группу уравнений можно представить в виде

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_k) b_{1k} + a_{12} b_{2k} + \dots + a_{1n} b_{nk} &= 0, \\ a_{21} b_{1k} + (a_{22} - \lambda_k) b_{2k} + \dots + a_{2n} b_{nk} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} b_{1k} + a_{n2} b_{2k} + \dots + (a_{nn} - \lambda_k) b_{nk} &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(IX. 17)}$$

Для того чтобы система уравнений (IX. 17) имела отличные от нуля решения, ее определитель должен быть равен нулю (см. Приложение VIII):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(IX. 18)}$$

(мы опустили индекс при λ, поскольку аналогичные условия получаются при любом k). Последнее выражение представляет собой алгебраическое уравнение n-й степени относительно неизвестной λ. Его называют характеристическим уравнением матрицы A.

Уравнение (IX. 18) имеет n корней: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, которые представляют собой элементы искомой диагональной матрицы (IX. 14). Подставляя поочередно значения λ_k в систему (IX. 17) и решая эту систему относительно неизвестных b_{ik}, найдем элементы матрицы перехода от переменных y_k, в которых квадратичная форма имеет диагональный вид, к прежним переменным x_i (см. (IX. 7)). Переход от переменных x_i к переменным y_k может быть осуществлен с помощью обратной матрицы B^{-1}. Так как по условию $D(B) \neq 0$ (преобразование B неособенное), то обратная матрица существует; ее элементы можно вычислить по формуле (VIII. 23).

Корни уравнения (IX. 18) (т. е. величины λ_k) будут вещественными. Это сразу следует из соотношений (IX. 16), если учесть вещественность величин a_{ik} и b_{ik}. Таким образом, матрица (IX. 14) будет вещественной.

Рассмотрим диагональную квадратичную форму вида

$$f = \sum_i x_i^2. \qquad \text{(IX. 19)}$$

Эта форма положительно определенная. Ее матрицей будет единичная матрица

$$A = E = \| \delta_{ik} \|. \qquad \text{(IX. 20)}$$

Применим к переменным x_i произвольное ортогональное преобразование B и посмотрим, какой вид будет иметь в новых переменных квадратичная форма (IX. 19). Согласно (IX. 13) матрица C квадратичной

формы в новых переменных определяется выражением

$$C = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

(см. формулы (VII. 36) и (VII. 38)). Следовательно, квадратичная форма (IX. 19) в новых переменных имеет вид

$$f = \sum_i y_i^2.$$

Таким образом, всякое ортогональное преобразование переменных оставляет без изменений квадратичную форму вида (IX. 19).

Рассмотрим вещественную квадратичную форму вида

$$f = \sum_{k,\,m} a_{km} z_k^* z_m, \qquad \text{(IX. 21)}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — комплексные величины[1]). Представим z_m в виде $x_m + iy_m$, соответственно z_k^* — в виде $x_k - iy_k$. Тогда

$$f = \sum_{k,\,m} a_{km}(x_k - iy_k)(x_m + iy_m) = \sum_{k,\,m} a_{km}(x_k x_m + y_k y_m) +$$
$$+ i \sum_{k,\,m} a_{km}(x_k y_m - x_m y_k) = f_1 + if_2. \qquad \text{(IX. 22)}$$

Произведем в сумме, определяющей мнимую часть f_2 полученного нами выражения, взаимную замену немых индексов k и m:

$$f_2 = \sum_{k,\,m} a_{km}(x_k y_m - x_m y_k) = \sum_{m,\,k} a_{mk}(x_m y_k - x_k y_m) =$$
$$= -\sum_{k,\,m} a_{km}(x_k y_m - x_m y_k) = -f_2$$

(мы воспользовались тем, что $a_{mk} = a_{km}$; см. (IX. 2)). Соотношение $f_2 = -f_2$ возможно только в том случае, если $f_2 = 0$. Таким образом, мы доказали, что квадратичная форма (IX. 21) при любых комплексных z

---

[1]) Напомним, что вещественной называется квадратичная форма с вещественными коэффициентами a_{km}. Форма (IX. 21) является частным случаем так называемой формы Эрмита, у которой коэффициенты, вообще говоря, комплексные и удовлетворяют условию $a_{ik} = a_{ki}^*$.

имеет вещественные значения. Согласно (IX. 22) запишем ее в виде

$$f=\sum_{k,\,m} a_{km}x_kx_m+\sum_{k,\,m} a_{km}y_ky_m=f_0(x_k)+f_0(y_k), \qquad (IX.23)$$

где

$$f_0(\xi_k)=\sum_{k,\,m} a_{km}\xi_k\xi_m$$

(напомним, что квадратичная форма полностью определяется своей матрицей, от обозначения переменных она не зависит).

Одновременное приведение двух квадратичных форм к диагональному виду. Пусть имеются две квадратичные формы:

$$f_1=\sum_{i,\,k} a_{ik}x_ix_k, \qquad (IX.24)$$

$$f_2=\sum_{i,\,k} b_{ik}x_ix_k. \qquad (IX.25)$$

Покажем, что если одна из них, скажем, f_1 положительно определенная, то можно найти такое линейное преобразование переменных, которое приводит обе формы к диагональному виду. Осуществим искомое преобразование в несколько этапов. Сначала с помощью ортогонального преобразования F перейдем к переменным v_i, в которых форма (IX. 24) примет диагональный вид

$$f_1=\sum_i \mu_i v_i^2$$

(такое преобразование подробно рассмотрено выше).

Теперь перейдем от переменных v_i к переменным

$$u_i=v_i\sqrt{\mu_i}$$

(легко убедиться в том, что при хотя бы одном $\mu_i\neq 1$ это преобразование неортогонально). Поскольку форма f_1 положительно определенная, все коэффициенты μ_i положительны, так что переменные u_i будут вещественными. В этих переменных

$$f_1=\sum u_i^2,$$

значит, матрицей f_1 будет E.

Наконец, перейдем с помощью ортогонального преобразования G от переменных u_i к таким перемен-

ным y_i, чтобы форма f_2 стала диагональной. Форма f_1 при этом останется диагональной, ибо, как было показано выше, квадратичная форма с матрицей E (см. (IX.20)) не изменяется при любом ортогональном преобразовании. Следовательно, в переменных y_i квадратичные формы (IX.24) и (IX.25) будут диагональными:

$$f_1 = \sum_i y_i^2, \quad f_2 = \sum_i \lambda_i y_i^2. \qquad \text{(IX.26)}$$

Вся последовательность преобразований может быть представлена схемой:

$$\begin{array}{cccc}
\text{(преобразование } F) & (\times \sqrt{\mu_i}) & \text{(преобразование } G) & \\
x_i \to v_i & \to & u_i \to y_i & \\
\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \to \sum_i \mu_i v_i^2 & \to & \sum_i u_i^2 \to \sum_i y_i^2 & \text{(IX.27)} \\
\sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k \to \sum_{i,k} b'_{ik} v_i v_k & \to & \sum_{i,k} b''_{ik} u_i u_k \to \sum_i \lambda_i y_i^2. &
\end{array}$$

Чтобы установить способ нахождения коэффициентов λ_i, образуем вспомогательную квадратичную форму

$$f = f_2 - \lambda f_1 = \sum_{i,k} (b_{ik} - \lambda a_{ik}) x_i x_k = \sum (\lambda_k - \lambda) y_k^2, \qquad \text{(IX.28)}$$

коэффициенты которой содержат параметр λ. Дискриминант этой формы в переменных x_i имеет вид

$$\det \| b_{ik} - \lambda a_{ik} \|, \qquad \text{(IX.29)}$$

а в переменных y_i

$$\det \| (\lambda_k - \lambda) \delta_{ik} \| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda). \qquad \text{(IX.30)}$$

Обозначив преобразование непосредственного перехода от переменных x_i к переменным y_i буквой B (это преобразование, вообще говоря, не будет ортогональным), напишем для матрицы квадратичной формы (IX.28) в переменных y_i выражение

$$C = \tilde{B} A B,$$

где через A обозначена матрица формы (IX.28) в переменных x_i (см. формулу (IX.11)). Согласно (IX.12)

$$D(C) = D(A)[D(B)]^2,$$

где $D(C)$ есть определитель (IX. 30), $D(A)$ — определитель (IX. 29), $D(B)$ — отличный от нуля определитель матрицы преобразования B, который не содержит параметра λ ($D(B) \neq 0$, так как преобразование B неособенное).

Итак,

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) = \det \| b_{ik} - \lambda a_{ik} \| [D(B)]^2.$$

Подстановка вместо λ любого из значений λ_k обращает в нуль левую часть уравнения, а следовательно, и множитель $\det\|b_{ik} - \lambda a_{ik}\|$. Таким образом, величины λ_k суть корни уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11} & b_{12} - \lambda a_{12} & \dots & b_{1n} - \lambda a_{1n} \\ b_{21} - \lambda a_{21} & b_{22} - \lambda a_{22} & \dots & b_{2n} - \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} - \lambda a_{n1} & b_{n2} - \lambda a_{n2} & \dots & b_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(IX. 31)}$$

Итак, задача приведения квадратичных форм (IX. 24) и (IX. 25) к диагональному виду сводится к нахождению корней уравнения (IX. 31).

Рассмотрим наряду с квадратичной формой от переменных x_i

$$f = \sum_{i, k} a_{ik} x_i x_k, \qquad \text{(IX. 32)}$$

аналогичную квадратичную форму от переменных $\dot{x}_i$

$$f' = \sum_{i, k} a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \qquad \text{(IX. 33)}$$

где $\dot{x}_i$ — производная переменной x_i по какому-либо параметру t. Назовем $\dot{x}_i$ i-й скоростью.

При линейном преобразовании

$$x_i = \sum_m c_{im} y_m \qquad \text{(IX. 34)}$$

от переменных x_i к новым переменным y_i скорости испытывают такое же преобразование

$$\dot{x}_i = \sum_m c_{im} \dot{y}_m. \qquad \text{(IX. 35)}$$

Выразим формы (IX. 32) и (IX. 33) в новых переменных. Для этого подставим в формулы (IX. 32) и

(IX. 33) выражения (IX. 34) и (IX. 35):

$$f=\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k=\sum_{i,k} a_{ik}\sum_m c_{im}y_m\sum_l c_{kl}y_l=$$

$$=\sum_{m,l} y_my_l\sum_{i,k} a_{ik}c_{im}c_{kl}=\sum_{m,l} b_{ml}y_my_l,$$

где

$$b_{ml}=\sum_{i,k} a_{ik}c_{im}c_{kl}. \qquad \text{(IX. 36)}$$

Аналогично

$$f'=\sum_{i,k} a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k=\sum_{i,k} a_{ik}\sum_m c_{im}\dot{y}_m\sum_l c_{kl}\dot{y}_l=$$

$$=\sum_{m,l} \dot{y}_m\dot{y}_l\sum_{i,k} a_{ik}c_{im}c_{kl}=\sum_{m,l} b_{ml}\dot{y}_m\dot{y}_l,$$

где b_{ml} имеет те же значения (IX. 36), что и в предыдущем случае.

Таким образом, при всяком линейном преобразовании от переменных x_i к новым переменным y_i коэффициенты квадратичной формы от скоростей $\dot{x}_i$ преобразуются точно таким образом, как коэффициенты аналогичной квадратичной формы от x_i. На этом основании схему (IX. 27) можно видоизменить следующим образом:

$$\begin{array}{cccc}
\text{(преобразование } F) & (\times\sqrt{\mu_i}); & \text{(преобразование } G) & \\
x_i\to v_i & \to & u_i\to y_i & \\
\sum_{i,k} a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k\to\sum_i \mu_i\dot{v}_i^2 & \to & \sum_i \dot{u}_i^2\to\sum_i \dot{y}_i^2 & \text{(IX.37)}\\
\sum_{i,k} b_{ik}x_ix_k\to\sum_{i,k} b'_{ik}v_iv_k & \to & \sum_{i,k} b''_{ik}u_iu_k\to\sum_i \lambda_iy_i^2. &
\end{array}$$

Предполагается, что квадратичная форма $\sum a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k$ положительно определенная.

X. Тензоры

1. Определение тензора. Чтобы прийти к понятию тензора, рассмотрим поляризацию анизотропного диэлектрика.

В изотропном диэлектрике поляризованность $\mathbf{P}$ пропорциональна напряженности электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{P}=\varkappa\mathbf{E}, \qquad \text{(X. 1)}$$

где $\varkappa$ — диэлектрическая восприимчивость. Согласно (X. 1) векторы **P** и **E** коллинеарны.

В анизотропном диэлектрике поляризуемость по разным направлениям различна. Вследствие этого направление вектора **P**, вообще говоря, не совпадает с направлением вектора **E**. Как показывает опыт, в любом анизотропном диэлектрике имеются три взаимно перпендикулярных направления таких, что при совпадении направления **E** с одним из них вектор **P** оказывается коллинеарным с **E**. Эти направления называются *главными*. Направим оси координат вдоль главных направлений диэлектрика (рис. X. 1). Произвольно направленный вектор **E** можно разложить на составляющие $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$ и $\mathbf{E}_z$ (последняя составляющая перпендикулярна к плоскости рисунка). Составляющая $\mathbf{E}_x$ создаст коллинеарную с ней поляризованность $\mathbf{P}_x = \varkappa_x \mathbf{E}_x$, где $\varkappa_x$ — восприимчивость в направлении оси x. Аналогично две другие составляющие создадут $\mathbf{P}_y = \varkappa_y \mathbf{E}_y$ и $\mathbf{P}_z = \varkappa_z \mathbf{E}_z$. Нетрудно заметить, что при различных по величине $\varkappa_x$, $\varkappa_y$ и $\varkappa_z$ результирующий вектор $\mathbf{P} = \mathbf{P}_x + \mathbf{P}_y + \mathbf{P}_z$ будет неколлинеарен с **E**.

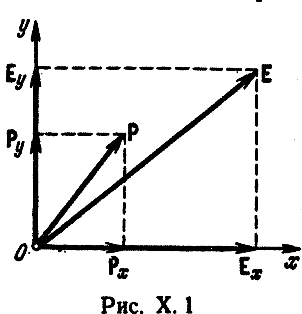


Рис. X. 1

Рассмотрим анизотропный диэлектрик, который мы будем считать однородной неограниченной средой. Свяжем с ним декартову систему координат, оси которой ориентированы совершенно произвольно и не совпадают ни с одним из главных направлений диэлектрика. Тогда при поле E_x, направленном по оси x, отличными от нуля будут не только P_x, но также P_y и P_z, причем

$$P_x = \varkappa_{xx} E_x, \quad P_y = \varkappa_{yx} E_x, \quad P_z = \varkappa_{zx} E_x, \qquad (X.2)$$

где $\varkappa_{xx}$, $\varkappa_{yx}$ и $\varkappa_{zx}$ — коэффициенты пропорциональности между E_x и соответствующими компонентами **P**.

Аналогично поля E_y и E_z вызовут поляризованности:

$$\begin{aligned} P_x &= \varkappa_{xy} E_y, \quad P_y = \varkappa_{yy} E_y, \quad P_z = \varkappa_{zy} E_y, \\ P_x &= \varkappa_{xz} E_z, \quad P = \varkappa_{yz} E_z, \quad P_z = \varkappa_{zz} E_z. \end{aligned} \qquad (X.3)$$

В случае поля **E**, не совпадающего ни с одной из координатных осей, одновременно будут существовать E_x, E_y и E_z, так что возникнут все P_i, определяемые формулами (X.2) и (X.3). Объединив соответствующие составляющие вектора **P**, получим

$$\begin{aligned} P_x &= \varkappa_{xx}E_x + \varkappa_{xy}E_y + \varkappa_{xz}E_z, \\ P_y &= \varkappa_{yx}E_x + \varkappa_{yy}E_y + \varkappa_{yz}E_z, \\ P_z &= \varkappa_{zx}E_x + \varkappa_{zy}E_y + \varkappa_{zz}E_z. \end{aligned} \tag{X.4}$$

Перейдя от буквенных индексов к цифровым, запишем уравнения (X.4) в компактном виде

$$P_i = \sum_k \varkappa_{ik}E_k \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{X.5}$$

Из сказанного выше вытекает, что для характеристики анизотропного диэлектрика необходимо задать девять величин $\varkappa_{ik}$ (в случае изотропного диэлектрика достаточно было одной величины $\varkappa$).

Перейдем от прежней системы координат x_1, x_2, x_3 (системы K) к новой системе x'_1, x'_2, x'_3 (системе K'), оси которой также не совпадают с главными направлениями диэлектрика. Выясним, как преобразуются величины $\varkappa_{ik}$ при таком переходе. В новой системе координат уравнения, связывающие P'_i и E'_k, аналогичны уравнениям (X.5):

$$P'_i = \sum_k \varkappa'_{ik}E'_k. \tag{X.6}$$

Здесь $\varkappa'_{ik}$ — девять величин, характеризующих диэлектрик в новой системе координат.

Согласно формулам (VI.37) и (VI.38) компоненты вектора **P** при переходе от системы K к системе K' преобразуются по формуле

$$P'_i = \sum_l \alpha_{il}P_l, \tag{X.7}$$

а компоненты вектора **E** при переходе от системы K' к системе K преобразуются по формуле

$$E_m = \sum_k \alpha_{km}E'_k. \tag{X.8}$$

(Напомним, что $\alpha_{ik} = \mathbf{e}'_i\mathbf{e}_k$ есть косинус угла между i-й штрихованной и k-й нештрихованной осями координат.)

Заменим в (X.7) P_l через E_m согласно соотношению (X.5). В результате получим

$$P'_i = \sum_l \alpha_{il} P_l = \sum_l \alpha_{il} \sum_m \varkappa_{lm} E_m = \sum_{l,\,m} \alpha_{il} \varkappa_{lm} E_m.$$

Теперь подставим сюда E_m из формулы (X.8):

$$P'_i = \sum_{l,\,m} \alpha_{il} \varkappa_{lm} \sum_k \alpha_{km} E'_k = \sum_k E'_k \sum_{l,\,m} \alpha_{il} \alpha_{km} \varkappa_{lm}.$$

Сопоставив полученное выражение с выражением (X.6), получим

$$\varkappa'_{ik} = \sum_{l,\,m} \alpha_{il} \alpha_{km} \varkappa_{lm}. \qquad (X.9)$$

Совокупность девяти величин T_{ik}, преобразующихся при переходе от системы координат K к системе K' по формуле

$$T'_{ik} = \sum_{l,\,m} \alpha_{il} \alpha_{km} T_{lm}, \qquad (X.10)$$

называется *тензором второго ранга* (или тензором второго порядка, или, наконец, тензором второй валентности).

Обратное преобразование (от системы K' к системе K) осуществляется по формуле

$$T_{ik} = \sum_{l,\,m} \alpha_{li} \alpha_{mk} T'_{lm}. \qquad (X.11)$$

Тензор записывают одним из следующих трех способов:

$$\mathbf{T} = (T_{ik}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \qquad (X.12)$$

Величины T_{ik} называют *компонентами* тензора. Компоненты T_{11}, T_{22} и T_{33} называются *диагональными*.

Таким образом, свойства анизотропного диэлектрика описываются тензором диэлектрической восприимчивости

$$(\varkappa_{ik}) = \begin{pmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & \varkappa_{13} \\ \varkappa_{21} & \varkappa_{22} & \varkappa_{23} \\ \varkappa_{31} & \varkappa_{32} & \varkappa_{33} \end{pmatrix}. \qquad (X.13)$$

Особый интерес представляет случай, когда оси координат совпадают с главными направлениями

диэлектрика. При этом условии составляющая поля E_i порождает только i-ю составляющую поляризованности, причем

$$P_i = \varkappa_{ii} E_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Сопоставление с (X. 5) приводит к выводу, что в рассматриваемом случае отличны от нуля только диагональные компоненты тензора, так что тензор диэлектрической восприимчивости имеет вид

$$(\varkappa_{ik}) = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_3 \end{pmatrix} \qquad (X.\ 14)$$

(мы оставили при отличных от нуля компонентах тензора только один индекс, так как у диагональных компонент оба индекса одинаковы).

Тензор, у которого отличны от нуля только диагональные компоненты[1]), называется *приведенным к главным осям*. Значения диагональных компонент, которые получаются в этом случае, называются *главными значениями тензора*.

Отметим, что у изотропного диэлектрика все три главные значения тензора диэлектрической восприимчивости одинаковы: $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa$. Это значение диагональных составляющих тензора и представляет собой диэлектрическую восприимчивость, рассматриваемую в курсе общей физики. В качестве главных направлений изотропного диэлектрика могут быть взяты любые три взаимно перпендикулярные направления.

Рассматриваются тензоры не только второго, но и других рангов. Так, например, тензором третьего ранга называется совокупность 27 величин T_{ikl}, преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой по формуле

$$T'_{ikl} = \sum_{m,\ p,\ s} \alpha_{im}\alpha_{kp}\alpha_{ls}T_{mps}. \qquad (X.\ 15)$$

Аналогично определяются тензоры других рангов. Тензор r-го ранга имеет 3^r компонент. Легко видеть, что вектор есть тензор первого ранга (он имеет $3^1 = 3$ ком-

[1]) Заметим, что это возможно лишь при специально выбранных координатных осях.

поненты), а скаляр — тензор нулевого ранга (он имеет $3^0 = 1$ компоненту).

Понятие тензора легко распространить на пространство n измерений. Тензором r-го ранга в таком пространстве (n-тензором r-го ранга) называется совокупность n^r величин $T_{ik\ldots p}$ (всего r индексов), преобразующихся по формуле, отличающейся от формулы (X. 15) лишь тем, что немые индексы пробегают при суммировании не три, а n значений.

Приведем еще несколько примеров тензоров второго ранга. Возьмем два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и образуем из их компонент произведения вида

$$\Pi_{ik} = a_i b_k. \tag{X. 16}$$

Легко убедиться в том, что эти произведения преобразуются по формуле (X. 10), т. е. обладают свойствами компонент тензора второго ранга.

Тензор

$$(\delta_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{X. 17}$$

называется *единичным тензором*. Согласно формуле преобразования (VI. 39) его составляющие в новой системе координат равны

$$\delta'_{ik} = \sum_{l,\,m} \alpha_{il}\alpha_{km}\delta_{lm} = \sum_{l} \alpha_{il}\alpha_{kl} = \delta_{ik}$$

(мы воспользовались свойством коэффициентов α_{ik}, выражаемым формулой (X. 39)). Таким образом, компоненты единичного тензора одинаковы во всех системах координат. Тензоры, обладающие таким свойством, называются *инвариантными*.

2. Тензорная алгебра. Рассмотрим основные операции с тензорами.

Суммой тензоров T_{ik} и G_{ik} называется тензор с компонентами

$$\Sigma_{ik} = T_{ik} + G_{ik}. \tag{X. 18}$$

В соответствии с (X. 18) любой тензор можно представить в виде суммы двух (или более) тензоров.

Произведением тензора T_{ik} на скаляр α называется тензор G_{ik} с компонентами

$$G_{ik} = \alpha T_{ik}. \tag{X. 19}$$

Произведением тензоров T_{ik} и G_{lm} называется тензор четвертого ранга Π_{iklm} с компонентами

$$\Pi_{iklm} = T_{ik} G_{lm}. \qquad (X.20)$$

Аналогично определяется произведение тензоров иных рангов, в частности, выше (см. (X. 16)) было рассмотрено произведение тензоров первого ранга, т. е. векторов. Из определения (X. 20) следует, что ранг тензора-произведения равен сумме рангов тензоров-сомножителей (могут перемножаться и тензоры неодинаковых рангов).

Свертыванием тензора называется следующая операция: два индекса при компонентах тензора полагаются одинаковыми и по ним осуществляется суммирование. Получившаяся в результате такой операции величина называется *сверткой тензора*. Очевидно, что свертывание понижает ранг тензора на две единицы. Операция свертывания может применяться к тензорам ранга не ниже второго[1]). В случае тензора второго ранга свертка представляет собой тензор нулевого ранга, т. е. скаляр. Этот скаляр называется *следом* (или *шпуром*) *тензора* (ср. со следом матрицы; стр. 386). Он равен сумме диагональных компонент:

$$\mathrm{Sp}\,(T_{ik}) = \sum_i T_{ii}. \qquad (X.21)$$

Скаляр не изменяется при преобразовании координат. Следовательно, след тензора представляет собой инвариант. Например, след тензора (X. 16) есть не что иное, как скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, которое, как мы знаем, инвариантно относительно преобразования координат (см. текст, следующий за формулой (VI. 28)).

В физических приложениях обычно применяется умножение тензоров в сочетании с последующим свертыванием получившегося выражения. Результат этих операций называется *скалярным произведением тензоров*[2]). Типичным примером может служить только

---

[1]) В случае тензора, ранг которого r выше второго, свертывание можно производить несколькими способами (по разным парам индексов). В результате будут получаться различные тензоры ранга $r-2$.

[2]) Иногда последнее произведение называют внутренним, в то время как выражение (X. 20) называют внешним произведением тензоров.

что упоминавшееся скалярное произведение векторов (тензоров первого ранга): тензор $a_i b_k$ свертывается по паре индексов i и k, в итоге получается выражение $\sum a_k b_k$.

В соответствии со сказанным, скалярным произведением тензора T_{ik} на вектор a_k называется вектор b_i с компонентами

$$b_i = \sum_k T_{ik} a_k. \qquad (X.22)$$

Убедимся в том, что определенная таким способом совокупность величин b_i действительно образует вектор. Для этого найдем закон преобразования величин b_i. Очевидно, что

$$b'_i = \sum_k T'_{ik} a'_k.$$

Подставим в последнее соотношение выражения T'_{ik} и a'_k через нештрихованные компоненты:

$$b'_i = \sum_k T'_{ik} a'_k = \sum_k \sum_{l,\,m} \alpha_{il} \alpha_{km} T_{lm} \sum_s \alpha_{ks} a_s =$$
$$= \sum_l \alpha_{il} \sum_{m,\,s} T_{lm} a_s \sum_k \alpha_{km} \alpha_{ks}.$$

Согласно свойству (VI. 40) $\sum_k \alpha_{km} \alpha_{ks} = \delta_{ms}$. Следовательно,

$$b'_i = \sum_l \alpha_{il} \sum_{m,\,s} T_{lm} a_s \delta_{ms} = \sum_l \alpha_{il} \sum_m T_{lm} a_m = \sum_l \alpha_{il} b_l.$$

Полученный нами результат означает, что величины b_i преобразуются по закону преобразования компонент вектора. Таким образом, определяемые выражением (X. 22) величины b_i действительно образуют вектор.

Аналогично можно убедиться в справедливости следующего утверждения: если выражение $\sum_k X_{ik} a_k$, образованное совокупностью 9-ти величин X_{ik} и компонентами некоторого вектора a_k представляет собой компоненты другого вектора b_i, то величины X_{ik} суть компоненты некоторого тензора. С подобной ситуацией мы столкнулись в начале этого Приложения. Совокупность девяти величин $\varkappa_{ik}$, взятая с компонентами

вектора E_k в сочетании (X. 5), дала компоненты вектора P_i. На этом основании мы показали, что величины $\varkappa_{ik}$ преобразуются по закону преобразования компонент тензора, т. е. что диэлектрическая восприимчивость является тензором.

В результате скалярного умножения вектора **a** на тензор **T** мы получили новый вектор **b**:

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}. \tag{X. 23}$$

Поэтому тензор **T** можно рассматривать как линейный оператор, осуществляющий преобразование одного вектора в другой.

Найдем произведение единичного тензора на вектор a_k. Согласно формуле (X. 22)

$$b_i = \sum_k \delta_{ik} a_k = a_i.$$

Таким образом, при умножении на единичный тензор вектор не изменяется.

3. Симметричные и антисимметричные тензоры. Тензор S_{ik}, компоненты которого удовлетворяют условию

$$S_{ik} = S_{ki}, \tag{X. 24}$$

называется *симметричным*. Отметим, что рассмотренный выше тензор диэлектрической восприимчивости является симметричным.

Тензор A_{ik}, компоненты которого удовлетворяют условию

$$A_{ik} = -A_{ki}, \tag{X. 25}$$

называется *антисимметричным*.

Свойство симметрии или антисимметрии является свойством самого тензора. Это следует из того факта, что оно сохраняется при любых преобразованиях координат. Для доказательства приведем следующие выкладки:

$$S'_{ik} = \sum_{l,\, m} \alpha_{il}\alpha_{km} S_{lm} = \sum_{m,\, l} \alpha_{im}\alpha_{kl} S_{ml} = \sum_{l,\, m} \alpha_{kl}\alpha_{im} S_{lm} = S'_{ki}$$

(сначала мы произвели взаимную замену немых индексов l и m, а затем заменили S_{ml} равным ему S_{lm}). Мы доказали, что тензор, симметричный в некоторой системе K, будет симметричным в любой другой системе K'.

Аналогично

$$A'_{ik}=\sum_{l,m}\alpha_{il}\alpha_{km}A_{lm}=\sum_{m,l}\alpha_{im}\alpha_{kl}A_{ml}=$$
$$=-\sum_{l,m}\alpha_{kl}\alpha_{lm}A_{lm}=-A'_{ki}$$

(после взаимной перестановки немых индексов мы заменили A_{ml} равным ему $-A_{lm}$). Мы доказали, что тензор, антисимметричный в K, будет антисимметричным и в K'.

Любой тензор T_{ik} можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Действительно, представим T_{ik} в виде

$$T_{ik}=\frac{T_{ik}+T_{ki}}{2}+\frac{T_{ik}-T_{ki}}{2}.$$

Правомерность такой записи очевидна. Вместе с тем, первое слагаемое не изменяется при перестановке индексов i и k, т. е. обладает свойствами компонент симметричного тензора; второе же слагаемое при перестановке индексов меняет знак, т. е. обладает свойствами компонент антисимметричного тензора.

Таким образом, всегда можно считать, что

$$T_{ik}=S_{ik}+A_{ik}, \tag{X.26}$$

где

$$S_{ik}=\frac{T_{ik}+T_{ki}}{2},\quad A_{ik}=\frac{T_{ik}-T_{ki}}{2}. \tag{X.27}$$

Понятия симметрии и антисимметрии применимы и к тензорам более высокого ранга. Так, например, T_{ikl} называется симметричным (антисимметричным) относительно индексов i и k (или i и l, или k и l), если при перестановке этих индексов компоненты тензора не изменяются (соответственно изменяют знак на обратный). Если компоненты тензора не изменяются (или изменяют знак на обратный) при перестановке любой пары индексов, то тензор называется *абсолютно симметричным* (соответственно *абсолютно антисимметричным*).

Введенная в Приложении VI совокупность 27 величин ε_{ikl} образует абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга. Напомним, что величины ε_{ikl}: 1) равны нулю, если любые два индекса имеют одинаковые значения; 2) равны $+1$, если все индексы

различны и образуют циклическую перестановку последовательности 1, 2, 3; 3) равны —1, если все индексы различны и образуют циклическую перестановку последовательности 3, 2, 1. Из 27 компонент этого тензора 21 равна нулю, три равны +1 и три равны —1. Путем несложных, но громоздких вычислений можно показать, что

$$\varepsilon'_{ikl} = \sum_{m,\,p,\,s} \alpha_{im}\alpha_{kp}\alpha_{ls}\varepsilon_{mps} = \varepsilon_{ikl}, \tag{X.28}$$

т. е. что тензор ε_{ikl} инвариантен.

4. Истинные тензоры и псевдотензоры. Выясним, как преобразуются компоненты тензора при инверсии координатных осей. Коэффициенты преобразования имеют в этом случае значения

$$\alpha_{ik} = -\delta_{ik}$$

(см. (VI.42)). Поэтому формула преобразования компонент тензора r-го ранга $T_{ik\ldots l}$ (всего r индексов) при инверсии имеет вид

$$T'_{ik\ldots l} = \sum_{m,\,p,\,\ldots,\,s} (-\delta_{im})(-\delta_{kp})\,\ldots\,(-\delta_{ls})T_{mp\ldots s} =$$
$$= (-1)^r \sum_{m,\,p,\,\ldots,\,s} \delta_{im}\delta_{kp}\,\ldots\,\delta_{ls}T_{mp\ldots s} = (-1)^r T_{ik\ldots l}.$$

Таким образом, компоненты тензора r-го ранга[1]) при инверсии преобразуются по формуле

$$T'_{ik\ldots l} = (-1)^r T_{ik\ldots l}.$$

Согласно (X.28) величины ε_{ikl} при любом преобразовании координат (а следовательно, и при инверсии) остаются инвариантными, т. е. знака не изменяют. Компоненты же истинного тензора третьего ранга должны при инверсии изменить знак на обратный. Поэтому совокупность величин ε_{ikl} образует не истинный тензор, а *псевдотензор*.

Превдотензором r-го ранга называется совокупность 3^r компонент $P_{ik\ldots l}$, которые при поворотах системы координат ведут себя как компоненты обычного тензора, а при инверсии преобразуются по формуле

$$P'_{ik\ldots l} = (-1)^{r+1} P_{ik\ldots l}.$$

---

[1]) Имеются в виду тензоры в пространстве трех измерений.

Приведем примеры псевдотензоров разных рангов. С псевдоскалярами и псевдовекторами мы познакомились в Приложении VI. Выше был рассмотрен псевдотензор третьего ранга ε_{ikl}. Совокупность величин P_{ik}, образованных из произведений компонент истинного вектора a_i и псевдовектора p_k: $P_{ik}=a_i p_k$, представляет собой псевдотензор второго ранга. Действительно, при инверсии величины a_i меняют знак, а величины p_k остаются неизменными. Следовательно, P_{ik} при инверсии будет менять знак. В то же время, мы знаем, что компоненты истинного тензора второго ранга при инверсии знака не изменяют. Значит, P_{ik} есть псевдотензор.

Легко сообразить, что результатом свертывания псевдотензора будет также псевдотензор (четность или нечетность ранга тензора при свертывании не изменяется, а формулы преобразования компонент исходного тензора и свертки отличаются на множитель $(-1)^2$). Например, при свертывании псевдотензора P_{ik} мы получим скалярное произведение истинного вектора и псевдовектора, т. е. псевдоскаляр.

Произведение псевдотензора любого ранга $P_{ik\ldots l}$ на истинный тензор любого ранга $T_{mp\ldots s}$ представляет собой псевдотензор

$$\Pi_{ik\ldots lmp\ldots s}=P_{ik\ldots l}T_{mp\ldots s}.$$

Для проверки этого утверждения составим таблицу:

	Ранг	Знак при инверсии
$P_{ik\ldots l}$	четный четный нечетный нечетный	изменяется изменяется не изменяется не изменяется
$T_{mp\ldots s}$	четный нечетный четный нечетный	не изменяется изменяется не изменяется изменяется
$\Pi_{ik\ldots lmp\ldots s}$	четный нечетный нечетный четный	изменяется не изменяется не изменяется изменяется

Аналогично можно убедиться в том, что произведение двух псевдотензоров любых рангов представляет собой истинный тензор.

5. Свойства симметричного тензора второго ранга. У симметричного тензора второго ранга из девяти компонент независимыми являются только шесть ($S_{12} = S_{21}$, $S_{13} = S_{31}$, $S_{23} = S_{32}$).

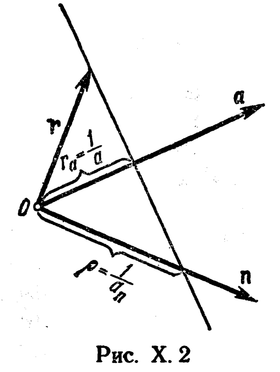


Рис. X. 2

Симметричный тензор второго ранга допускает важную геометрическую интерпретацию. Прежде чем перейти к ее рассмотрению, отметим, что вектор **a** можно представить не только направленным отрезком, но и плоскостью, уравнение которой имеет вид

$$\mathbf{ar} = 1, \qquad (X.29)$$

где **r** — радиус-вектор точки плоскости (рис. X. 2). Поскольку

$$\mathbf{ar} = ar_a = 1, \text{ то } r_a = 1/a.$$

Следовательно, уравнение (X. 29) определяет плоскость, перпендикулярную к вектору **a** и отстоящую от начала координат на расстояние $1/a$. Выражение (X. 29) можно также представить в виде $a_r r = 1$, откуда $r = 1/a_r$. Таким образом, на прямой, проходящей через начало координат и имеющей направление **n** (см. рис. X. 2), плоскость (X. 29) отсекает отрезок длины

$$\rho = \frac{1}{a_n}. \qquad (X.30)$$

Теперь обратимся к симметричному тензору **S**. Сопоставим ему поверхность, определяемую уравнением

$$\mathbf{r}(\mathbf{Sr}) = 1. \qquad (X.31)$$

Очевидно, что эта поверхность не зависит от выбора системы координат, в которой определяются компоненты тензора **S** и радиуса-вектора **r**. Характер поверхности зависит только от свойств тензора **S**.

Выберем произвольную систему координат x_1, x_2, x_3 и выразим левую часть уравнения (X. 31) через ком-

поненты $\mathbf{r}$ и $\mathbf{S}$ в этой системе. Согласно (X. 22)

$$(\mathbf{Sr})_i = \sum_k S_{ik} x_k.$$

Умножив скалярно $\mathbf{r}$ на вектор $\mathbf{Sr}$, получим

$$\sum_i x_i (\mathbf{Sr})_i = \sum_i x_i \sum_k S_{ik} x_k = \sum_{i,\,k} S_{ik} x_i x_k.$$

Следовательно, уравнение (X. 31) имеет вид

$$\sum_{i,\,k} S_{ik} x_i x_k = 1. \qquad (X.32)$$

В развернутом виде это уравнение выглядит следующим образом (напомним, что $S_{ik} = S_{ki}$):

$$S_{11}x_1^2 + S_{22}x_2^2 + S_{33}x_3^2 + 2S_{12}x_1x_2 + 2S_{23}x_2x_3 + 2S_{31}x_3x_1 = 1. \qquad (X.33)$$

Уравнение (X. 33) есть уравнение поверхности второго порядка, центр которой помещается в начале координат. В приложениях тензорного исчисления к физическим задачам диагональные компоненты S_{ii} бывают больше нуля (это например, имеет место для

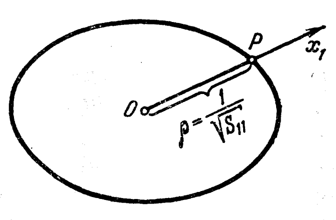


Рис. X. 3

величин $\varkappa_{ii}$). В этом случае поверхность (X. 33) представляет собой эллипсоид. Этот эллипсоид и является геометрическим образом симметричного тензора второго ранга (разумеется в пространстве трех измерений), подобно тому как направленный отрезок или плоскость (X. 29) дают геометрический образ тензора первого ранга, т. е. вектора.

Найдем расстояние от центра эллипсоида до точек, лежащих на его поверхности. Для этого проведем из центра эллипсоида произвольную прямую (рис. X. 3), которую примем за ось x_1. Тогда расстоя-

ние ρ от центра эллипсоида до точки P будет равно значению x_1 при $x_2 = x_3 = 0$. Положив в уравнении (X.33) $x_2 = x_3 = 0$, получим, что $S_{11}x_1^2 = 1$, откуда

$$x_1 = \rho = \frac{1}{\sqrt{S_{11}}}$$

(ср. с (X.30)). Таким образом, расстояние ρ есть величина, обратная корню квадратному из компоненты тензора S_{11}, вычисленной при условии, что направление, вдоль которого отсчитывается ρ, принято за ось x_1.

При преобразованиях координат изменяются коэффициенты S_{ik} в уравнении (X.33), однако сам эллипсоид от выбора системы координат не зависит. Если направить оси координат вдоль полуосей эллипсоида, уравнение эллипсоида, т. е. уравнение (X.33), как известно, упрощается и принимает вид

$$S_{11}x_1^2 + S_{22}x_2^2 + S_{33}x_3^2 = 1.$$

Это означает, что при указанном выборе координатных осей недиагональные компоненты тензора обращаются в нуль. Следовательно, главные оси тензора совпадают с полуосями тензорного эллипсоида.

Если координатные оси направить вдоль главных осей тензора (т. е. вдоль полуосей тензорного эллипсоида), тензор принимает диагональный вид

$$(S_{ik}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \qquad (X.34)$$

Мы ввели обозначения: $S_{11} = \lambda_1$, $S_{22} = \lambda_2$, $S_{33} = \lambda_3$. Величины λ_1, λ_2, λ_3 суть *главные значения тензора.*

В случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, тензорный эллипсоид превращается в сферу. В частности, единичному тензору δ_{ik} соответствует сфера единичного радиуса.

Умножим некоторый вектор **a** на тензор (X.34). В результате получится вектор **b**, составляющие которого определяются по формуле (X.22). Компоненты тензора (X.34) можно представить в виде $S_{ik} = \lambda_i\delta_{ik}$. Следовательно,

$$b_i = \sum_k \lambda_i \delta_{ik} a_k = \lambda_i a_i. \qquad (X.35)$$

Пусть вектор **a** направлен вдоль первой главной оси тензора. Тогда $a_1 = a$, $a_2 = a_3 = 0$ (взяв тензор в виде (X. 34), мы предположили, что оси координат направлены по главным осям тензора). Согласно формуле (X. 35) компоненты вектора **b** будут равны $b_1 = \lambda_1 a_1$, $b_2 = b_3 = 0$. Это означает, что направление вектора **b** совпадает с направлением вектора **a**, модуль же вектора **b** в λ_1 раз больше чем модуль вектора **a**. То же справедливо и для двух других главных осей. Таким образом, если вектор **a** направлен по одной из главных осей тензора, то справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{Sa} = \lambda \mathbf{a}, \qquad (X.36)$$

где λ — соответствующее главное значение тензора.

Мы пришли к следующему результату: при умножении вектора, имеющего направление одной из главных осей, на тензор направление вектора не изменяется, величина же вектора увеличивается в число раз, равное соответствующему главному значению тензора.

Равенство (X. 36) справедливо в любой системе координат, лишь бы вектор **a** был направлен по одной из главных осей тензора. Этим обстоятельством можно воспользоваться для нахождения главных значений и главных осей тензора. Для этого нужно варьировать направление вектора **a**, пока вектор **Sa** не совпадет по направлению с **a**. Соответствующее направление даст главную ось тензора, а отношение **Sa** к **a** — соответствующее главное значение. Аналитически это выглядит следующим образом. Запишем равенство (X.36) в компонентах (мы пока еще не привели тензор к главным осям, так что, вообще говоря, все S_{ik} отличны от нуля):

$$S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3 = \lambda a_1,$$
$$S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3 = \lambda a_2,$$
$$S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3 = \lambda a_3.$$

Приведя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} (S_{11} - \lambda)a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3 &= 0, \\ S_{21}a_1 + (S_{22} - \lambda)a_2 + S_{23}a_3 &= 0, \\ S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + (S_{33} - \lambda)a_3 &= 0. \end{aligned} \qquad (X.37)$$

Мы пришли к однородной системе трех уравнений с неизвестными a_1, a_2, a_3 — компонентами искомого вектора **a**. Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, требуется равенство нулю ее определителя (см. Приложение VIII; текст, следующий за формулой (VIII. 26)). Таким образом, должно выполняться условие

$$\begin{vmatrix} S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (X.38)$$

Корни этого кубического относительно λ уравнения представляют собой главные значения тензора: λ_1, λ_2, λ_3. Подставив один из этих корней в систему (X. 37), мы сможем найти отношения a_2/a_1 и a_3/a_1, которые определят направление вектора **a**, удовлетворяющего уравнению (X. 36), т. е. соответствующую главную ось тензора. Проделав эту операцию для всех трех λ_i, найдем направления всех главных осей.

Мы предполагали, что все корни λ_1, λ_2 и λ_3 разные. В случае, когда уравнение (X.38) имеет кратные корни, необходимо некоторое уточнение. При двух кратных корнях ($\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, $\lambda_1 \neq \lambda$) тензорный эллипсоид будет эллипсоидом вращения. Однозначно будет определена только одна главная ось тензора, совпадающая с осью симметрии эллипсоида. В качестве двух других главных осей можно взять две любые взаимно перпендикулярные оси, перпендикулярные к оси симметрии эллипсоида. Если все три корня уравнения (X. 38) одинаковы ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$), тензорный эллипсоид вырождается в сферу и в качестве главных осей можно взять любые три взаимно перпендикулярные оси.

Рассмотрим свойства симметричного тензора как оператора. Согласно (X. 36) воздействие **S** на вектор **a**, направленный вдоль одной из главных осей тензора, вызывает лишь изменение длины вектора в λ раз. Воздействие **S** на произвольно ориентированный вектор вызывает, вообще говоря, изменение как длины, так и направления этого вектора (см., например, рис. X. 1).

6. Свойства антисимметричного тензора второго ранга. Обратимся теперь к антисимметричному тензору второго ранга. Условие (X. 25) для диагональ-

ных компонент имеет вид $A_{ii} = -A_{ii}$. Это возможно лишь при $A_{ii} = 0$. Следовательно, диагональные компоненты антисимметричного тензора равны нулю. Из остальных шести компонент независимыми являются только три. Таким образом, антисимметричный тензор второго ранга определяется, как и вектор, тремя величинами:

$$\begin{aligned} A_{12} &= -A_{21} = a_3, \\ A_{23} &= -A_{32} = a_1, \\ A_{31} &= -A_{13} = a_2. \end{aligned} \tag{X.39}$$

Воспользовавшись этими обозначениями, можно записать антисимметричный тензор следующим образом:

$$(A_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{X.40}$$

Компоненты тензора (X.40) можно представить в виде

$$A_{ik} = \sum_l \varepsilon_{ikl} a_l = \varepsilon_{ik1} a_1 + \varepsilon_{ik2} a_2 + \varepsilon_{ik3} a_3, \tag{X.41}$$

где ε_{ikl} — абсолютно антисимметричный псевдотензор (см. текст, предшествующий формуле (X.28)). Действительно, определяемые этой формулой компоненты A_{ii} равны нулю, так как ε_{iil} при любом l равно нулю. Далее

$$A_{12} = \varepsilon_{121} a_1 + \varepsilon_{122} a_2 + \varepsilon_{123} a_3 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 = a_3,$$

$$A_{13} = \varepsilon_{131} a_1 + \varepsilon_{132} a_2 + \varepsilon_{133} a_3 = 0 \cdot a_1 + (-1) \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = -a_2$$

и т. д.

Выше было показано, что при перемножении истинного тензора и псевдотензора получается псевдотензор. Произведение же двух псевдотензоров представляет собой истинный тензор. Тот факт, что величины a_i, будучи умноженными на псевдотензор ε_{ikl} (см. формулу (X.41)), дают компоненты истинного тензора второго ранга, указывает на то, что эти величины обладают свойствами псевдотензора первого ранга, т. е. псевдовектора.

Итак, всякому антисимметричному тензору второго ранга может быть сопоставлен псевдовектор с компо-

нентами a_i, определяемыми формулами (X.39). И наоборот, всякому псевдовектору a_i может быть поставлен в соответствие истинный антисимметричный тензор второго ранга, компоненты которого выражаются через компоненты псевдовектора по формуле (X.41).

Применим оператор **A** (**A** — антисимметричный тензор) к некоторому вектору **b**. Согласно (X.22) и (X.41) мы получим вектор **c** с компонентами:

$$c_i = \sum_k A_{ik} b_k = \sum_{k,\, l} \varepsilon_{ikl} b_k a_l.$$

Сопоставив полученное выражение с формулой (VI.33), приходим к выводу, что **c** можно представить в виде векторного произведения[1]) векторов **b** и **a**:

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{b} = [\mathbf{b}\mathbf{a}].$$

Вектор **c** перпендикулярен как к исходному вектору **b**, так и к псевдовектору **a**, соответствующему тензору **A**. Таким образом, воздействие тензора **A** вызывает поворот вектора на угол $\pi/2$. Кроме того, вообще говоря, изменяется длина вектора.

XI. Некоторые сведения из векторного анализа

Градиент. Рассмотрим скалярное поле, т. е. область пространства, каждой точке которой соответствует определенное значение скаляра φ:

$$\varphi = \varphi(P) = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x_1,\ x_2,\ x_3),$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, а x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты точки P.

Всем точкам поверхности, определяемой уравнением

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3) = \text{const}, \qquad \text{(XI. 1)}$$

соответствует одинаковое значение φ. Поверхность вида (XI. 1) называется *поверхностью уровня* скаляра φ. Поверхность уровня можно провести через любую точку поля.

---

[1]) Напомним, что векторное произведение представляет собой полярный вектор только в том случае, если один из сомножителей является псевдовектором. Отсюда также можно было заключить, что **a** есть не истинный вектор, а псевдовектор.

При смещении из точки P на отрезок $d\mathbf{r}$ функция φ получает приращение

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i.$$

Последнее выражение не зависит от выбора координат x_i, т. е. представляет собой инвариант. Совокупность величин dx_i образует вектор $d\mathbf{r}$. Поэтому (см. текст, следующий за формулой (VI. 28)) можно утверждать, что величины $\partial\varphi/\partial x_i$ суть проекции некоторого вектора на оси x_i. Этот вектор называют *градиентом* скаляра φ и обозначают символом grad φ. Итак,

$$\operatorname{grad}\varphi = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \qquad (XI.2)$$

или, в обычных обозначениях,

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Определение (XI. 2) легко распространить на пространство n измерений. В последнем случае число слагаемых в формуле (XI. 2) будет равно не трем, а n.

Докажем, что компоненты градиента преобразуются по формулам (VI. 37). Взяв две системы координат K и K', можно написать

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x'_i} dx'_i. \qquad (XI.3)$$

Выразим dx_i через dx'_k по формуле (VI. 38) и подставим эти выражения в (XI. 3):

$$\sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \sum_k \alpha_{ki}\, dx'_k = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x'_i} dx'_i.$$

Изменим в левой части порядок суммирования по индексам i и k:

$$\sum_k dx'_k \sum_i \alpha_{ki} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x'_i} dx'_i.$$

Индексы i и k являются немыми. Как уже отмечалось, немой индекс можно обозначить любой буквой.

Поэтому сумма слева не изменится, если переставить индексы i и k. В итоге получим

$$\sum_i dx_i' \sum_k \alpha_{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i'} dx_i'.$$

Из полученного нами соотношения следует

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i'} = \sum_k \alpha_{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k},$$

что совпадает с (VI. 37). Таким образом, мы показали, что величины $\partial\varphi/\partial x_i$ при преобразованиях координат ведут себя как компоненты вектора.

Гамильтон ввел векторный дифференциальный оператор ∇ (оператор набла) или *оператор Гамильтона*, который представляет собой вектор с составляющими $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \qquad \text{(XI. 4)}$$

Сам по себе вектор ∇ смысла не имеет. Он приобретает смысл, будучи применен к скалярной или векторной функции. Так, при символическом умножении ∇ на φ получается градиент φ:

$$\nabla\varphi = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

Следовательно, $\nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi$. Согласно (XI. 3) приращение φ может быть представлено в виде скалярного произведения векторов $\operatorname{grad}\varphi$ и $d\mathbf{r}$:

$$d\varphi = \operatorname{grad}\varphi \cdot d\mathbf{r} = (\nabla\varphi)\, d\mathbf{r}. \qquad \text{(XI. 5)}$$

При перемещении по поверхности уровня φ остается неизменной ($d\varphi = 0$). Отсюда в соответствии с (XI. 5) вытекает, что вектор $\nabla\varphi$ в каждой точке поля направлен по нормали к поверхности уровня. Найдем скорость изменения φ вдоль некоторого направления l, т. е. $d\varphi/dl$. Согласно (XI. 5) приращение φ на отрезке $d\mathbf{l}$ равно $(\nabla\varphi)\, d\mathbf{l} = (\nabla\varphi)_l dl$, где $(\nabla\varphi)_l$ — проекция градиента на направление l. Поэтому $\frac{d\varphi}{dl} = \frac{(\nabla\varphi)_l\, dl}{dl} = (\nabla\varphi)_l$. Таким образом, проекция градиента на неко-

торое направление дает скорость изменения функции в данном направлении.

Отметим, что вектор $\nabla\varphi$ существует в каждой точке скалярного поля φ. Следовательно, градиент образует векторное поле, т. е. область пространства, каждой точке которой соответствует определенное значение вектора $\nabla\varphi$.

Дивергенция. Пусть нам дано поле вектора **a**. Потоком вектора **a** через поверхность f называется выражение

$$\Phi_a = \int\limits_f a_n\,df = \int\limits_f \mathbf{a}\,d\mathbf{f}, \qquad \text{(XI. 6)}$$

где a_n — проекция вектора **a** на положительную нормаль к площадке df, $d\mathbf{f}$ — вектор элементарной площадки, его модуль равен величине площадки df, а направление совпадает с направлением положительной нормали к площадке. Направление положительной нормали определяется в зависимости от обстоятельств. Так, например, при вычислении потока через замкнутую поверхность положительной считается внешняя нормаль.

Название «поток» обусловлено тем, что в случае поля вектора скорости жидкости интеграл (XI. 6) дает поток жидкости через поверхность f, т. е. объем жидкости, протекающей через f в единицу времени.

Окружим точку P поля замкнутой поверхностью f. Вычислим поток Φ_a через эту поверхность. Отношение Φ_a к V будет характеризовать свойства поля в окрестности точки P, усредненные по объему V, заключенному внутри f. Чем меньше линейные размеры объема, тем ближе будет средняя характеристика к истинной характеристике поля в точке P. Скалярную величину

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\Phi_a}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint a_n\,df \qquad \text{(XI. 7)}$$

называют *дивергенцией* (или расхождением) векторного поля в точке P.

Определение (XI. 7) является самым общим, не зависящим от выбора координатной системы. Найдем выражение для дивергенции через проекции **a** на оси декартовой системы координат. Возьмем в окрестности точки P объем в виде прямоугольного параллеле-

пипеда с гранями, перпендикулярными к координатным осям (рис. XI. 1). Найдем поток вектора **a** через грани *1* и *2*, перпендикулярные к оси x. Внешняя нормаль к грани *1* совпадает по направлению с осью x. Поэтому для этой грани $a_n = a_{x1}$ (индекс 1 указывает, что значение a_x берется в точке, лежащей на грани *1*). Внешняя нормаль к грани *2* противоположна по направлению оси x. Поэтому для нее $a_n = -a_{x2}$ (индекс 2 указывает, что значение a_x берется в точке, лежащей на грани *2*). Суммарный поток через грани *1* и *2* равен

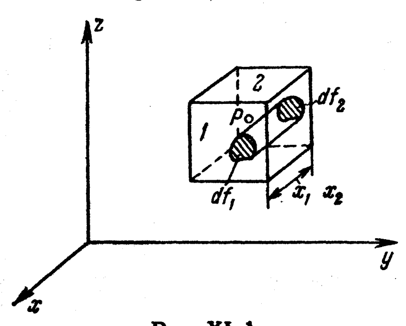


Рис. XI. 1

$$\Phi_x = \int\limits_{(1)} a_{x1}\, df_1 - \int\limits_{(2)} a_{x2}\, df_2 = \int\limits_{f} (a_{x1} - a_{x2})\, df, \qquad \text{(XI. 8)}$$

где $df = df_1 = df_2$ (см. рис. XI. 1), a_{x1} и a_{x2} берутся для точек граней *1* и *2* с одинаковыми y и z. Интеграл, стоящий справа, берется по поверхности f любой из граней *1* и *2*.

Разложим a_x в ряд в окрестности точки P:

$$a_x = a_{xP} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_P (x - x_P) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_P (y - y_P) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_P (z - z_P) + \varepsilon_x. \qquad \text{(XI. 9)}$$

Здесь x_P, y_P, z_P — координаты точки P, a_{xP} — значение a_x в точке P, $(\partial a_x/\partial x)_P$ и т. д. — значения производных в точке P, ε_x — величина более высокого порядка малости, чем разности $(x - x_P)$, $(y - y_P)$, $(z - z_P)$, т. е. величина, убывающая быстрее, чем линейные размеры параллелепипеда.

Положив в выражении (XI. 9) $x = x_1$, найдем значения a_x в точках грани *1*, т. е. a_{x1}; положив $x = x_2$, получим значения a_{x2}. Вычтя эти значения друг из друга, получим для противолежащих площадок df_1 и df_2 (значения y и z для них одинаковы)

$$a_{x1} - a_{x2} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_P (x_1 - x_2) + \varepsilon'_x,$$

где опять-таки ε'_x — величина, убывающая быстрее, чем линейные размеры объема.

Подставив найденное нами значение в формулу (XI. 8), получим

$$\Phi_x = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_P (x_1 - x_2) \int_f df + \int_f \varepsilon'_x \, df = \\ = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_P (x_1 - x_2) f + \int_f \varepsilon'_x \, df.$$

Из рис. XI. 1 видно, что произведение $(x_1 - x_2) f$ дает объем параллелепипеда V. Поэтому

$$\Phi_x = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_P V + \varepsilon''_x,$$

где ε''_x — величина более высокого порядка малости, чем V. Аналогичные выражения получаются и для потоков через пары граней, перпендикулярных к осям y и z:

$$\Phi_y = \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)_P V + \varepsilon''_y, \quad \Phi_z = \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_P V + \varepsilon''_z.$$

Сложив вместе Φ_x, Φ_y и Φ_z, получим полный поток вектора **a** через поверхность параллелепипеда. Разделив согласно определению (XI. 7) этот поток на V и сделав предельный переход[1]) $V \to 0$, придем к формуле

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad \text{(XI. 10)}$$

(за ненадобностью мы опустили индекс P при производных).

Найденное нами выражение (XI. 10) для дивергенции можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \qquad \text{(XI. 11)}$$

В такой форме понятие дивергенции может быть распространено на векторные поля в пространстве n измерений. Определение (XI. 7) также можно распро-

---

[1]) При предельном переходе величины ε''/V обращаются в нуль.

странить на пространство n измерений. В этом случае под элементом объема следует понимать $dV^* = dx_1 dx_2 dx_3 \ldots dx_n$. Интеграл нужно брать по гиперповерхности размерности $n-1$. Элемент гиперповерхности, перпендикулярный к оси x_k, будет равен $df^* = dx_1 dx_2 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_n$. В пространстве четырех измерений гиперповерхностью будет обычный трехмерный объем.

Выражение (XI. 11) можно рассматривать как сумму произведений величин $\nabla_i = \partial/\partial x_i$ и a_i, т. е. как скалярное произведение векторов ∇ и $\mathbf{a}$. Поэтому дивергенцию можно представить в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv \nabla \mathbf{a}. \qquad \text{(XI. 12)}$$

Величина $\nabla \mathbf{a}$ существует в каждой точке векторного поля $\mathbf{a}$. Следовательно, дивергенция образует скалярное поле, определенное в той же части пространства, что и поле вектора $\mathbf{a}$.

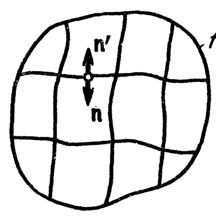


Рис. XI. 2

Возьмем в поле вектора $\mathbf{a}$ конечный объем V, ограниченный поверхностью f (рис. XI. 2). Разобьем этот объем на элементарные объемы ΔV. Согласно (XI. 7) для потока $\Delta\Phi_a$ через поверхность такого объема можно написать $\Delta\Phi_a \approx \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \Delta V = \nabla \mathbf{a} \cdot \Delta V$. Сложим эти выражения для всех элементарных объемов. При суммировании $\Delta\Phi_a$ потоки через грани, разделяющие два соседних объема, взаимно уничтожатся (для смежных объемов потоки отличаются знаками, так как внешние нормали $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ имеют противоположные направления). Некомпенсированными останутся только потоки через участки внешней поверхности f, так что в сумме получится поток вектора $\mathbf{a}$ через эту поверхность. Сумма справа в пределе (при $\Delta V \to 0$) превратится в интеграл по всему объему. Приближенное равенство в пределе перейдет в строгое равенство. В итоге получим

$$\oint_f a_n \, df = \int_V \nabla \mathbf{a} \, dV. \qquad \text{(XI. 13)}$$

Полученное нами соотношение носит название теоремы Остроградского — Гаусса: *поток вектора через*

замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции по объему, ограниченному этой поверхностью.

Ротор. Циркуляцией вектора **a** по контуру Г называется выражение

$$C_a = \oint_{Г} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \oint_{Г} a_l\, dl. \qquad \text{(XI. 14)}$$

Например, в поле консервативных сил циркуляция вектора **F** равна работе сил на замкнутом пути Г.

Возьмем в окрестности точки P контур Г, лежащий в плоскости, проходящей через P. Найдем циркуляцию C_a по этому контуру. Отношение C_a к поверхности f, охватываемой контуром, будет характеризовать свойства поля в окрестности точки P, усредненные по поверхности f. Чем меньше линейные размеры поверхности, тем ближе будет средняя характеристика к истинной характеристике поля в точке P. В пределе, при стягивании контура к точке P, средняя характеристика превратится в истинную. Таким образом, свойства векторного поля в некоторой точке P можно охарактеризовать величиной

$$\lim_{Г \to 0} \frac{C_a}{f} = \lim_{Г \to 0} \frac{1}{f} \oint_{Г} a_l\, dl. \qquad \text{(XI. 15)}$$

Величина (XI.15) зависит не только от свойств поля в точке P, но и от ориентации плоскости, в которой лежит контур. Ориентацию этой плоскости в пространстве можно задать нормалью к плоскости, связанной с направлением обхода по контуру Г при интегрировании правилом правого винта (рис. XI.3) Для разных направлений **n** величина (XI. 15) будет иметь в одной и той же точке P разное значение, причем, как легко сообразить, противоположным направлениям **n** соответствуют значения величины (XI. 15), отличающиеся только знаком. Следовательно, величина, определяемая формулой (XI. 15), ведет себя как проекция некоторого вектора на направление нормали к контуру Г. Этот вектор называют *ротором* (или *вихрем*) векторного поля в точке P и

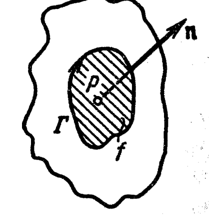


Рис. XI. 3

обозначают символом rot **a**. Таким образом,

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_n = \lim_{\Gamma \to 0} \frac{C_a}{f} = \lim_{\Gamma \to 0} \frac{1}{f} \oint a_l\, dl. \qquad \text{(XI. 16)}$$

Формула (XI. 16) дает самое общее определение ротора, не зависящее от выбора координатной системы. Найдем выражение для ротора через проекции вектора **a** на оси декартовой системы координат. Начнем с определения проекции вектора rot **a** на ось x. Для этого возьмем в окрестности точки P контур Г, лежащий в плоскости, перпендикулярной к оси x (рис. XI. 4). Направление обхода по контуру выберем так, чтобы оно образовывало с направлением оси x правовинтовую систему. Тогда направления **n** и оси x совпадут и выражение (XI. 16) даст $(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_x$. Для выбранного нами контура

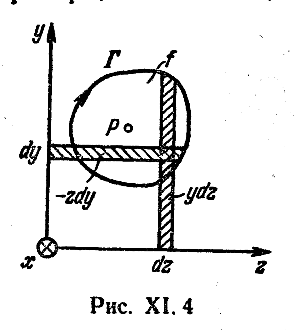


Рис. XI. 4

$$\oint_\Gamma a_l\, dl = \oint_\Gamma \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \oint_\Gamma (a_y\, dy + a_z\, dz)$$

(для всех элементов контура $dx = 0$).

Значения a_y для точек контура можно представить в виде[1])

$$a_y = a_{yP} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)_P (y - y_P) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_P (z - z_P) + \varepsilon_y =$$

$$= \mathrm{const} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)_P y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_P z + \varepsilon_y,$$

где const включает в себя три слагаемых, не зависящих от y и z, ε_y — величина более высокого порядка малости, чем линейные размеры контура. Следовательно,

$$\oint a_y\, dy =$$

$$= \mathrm{const} \oint dy + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)_P \oint y\, dy + \left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_P \oint z\, dy + \oint \varepsilon_y\, dy.$$

---

[1]) Смысл величин в этом выражении аналогичен смыслу величин в формуле (XI. 9); слагаемое с $(x - x_P)$ отсутствует, так как для всех точек контура $x = x_P$.

Легко сообразить, что $\oint dy = 0$. Точно так же равен нулю интеграл $\oint y\,dy = {}^1/_2 \oint d(y^2)$. Из рис. XI. 4 нетрудно заключить, что $\oint z\,dy = -f$, где f — площадь контура. Таким образом

$$\oint a_y\,dy = -\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_P f + \varepsilon'_y, \qquad \text{(XI. 17)}$$

где ε'_y — величина более высокого порядка малости, чем площадь контура f.

Проделав аналогичные выкладки для a_z, придем к выражению

$$\oint a_z\,dz = \text{const} \oint dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_P \oint y\,dz + \oint \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_P \oint z\,dz + \oint \varepsilon_z\,dz.$$

Интегралы $\oint dz$ и $\oint z\,dz = {}^1/_2 \oint d(z^2)$ равны нулю, $\oint y\,dz = f$. Поэтому

$$\oint a_z\,dz = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_P f + \varepsilon'_z. \qquad \text{(XI. 18)}$$

Выражения (XI. 17) и (XI. 18) в сумме дают $\oint a_l\,dl$. Разделив в соответствии с определением (XI. 16) эту сумму на f и осуществив предельный переход [1]), получим

$$(\text{rot}\,\mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}.$$

Рассмотрев циркуляцию для контуров, ориентированных нормалью $\mathbf{n}$ по осям y и z, можно получить выражения для проекций ротора на эти оси:

$$(\text{rot}\,\mathbf{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \qquad (\text{rot}\,\mathbf{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Формулы для проекций ротора на координатные оси легко запомнить, приняв во внимание, что в

[1]) При предельном переходе величины ε'/f обращаются в нуль.

каждой из них индекс при rot **a** и буквы, стоящие справа в знаменателях, образуют циклическую перестановку, осуществляемую по схеме: $x \to y$
$\nwarrow z \swarrow$

Зная проекции, легко найти сам вектор:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{e}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \mathbf{e}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \qquad \text{(XI. 19)}$$

С учетом того, что, например, $\partial a_z/\partial y$ можно представить в виде $\nabla_y a_z$ и т. д. ($\nabla_y = \partial/\partial y$ — проекция вектора ∇ на ось y), запишем формулу (XI. 19) следующим образом:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \qquad \text{(XI. 20)}$$

Наконец, сравнение с формулой (VI. 31) дает нам право написать, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv [\nabla\mathbf{a}]. \qquad \text{(XI. 21)}$$

Воспользовавшись формулами (VI. 29) и (VI. 33) для векторного произведения, можно написать для ротора и его k-й компоненты следующие выражения:

$$[\nabla\mathbf{a}] = \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \mathbf{e}_l,$$

$$[\nabla\mathbf{a}]_k = \sum_{m,n} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial a_n}{\partial x_m}. \qquad \text{(XI. 22)}$$

Рис. XI. 5

Величина $[\nabla\mathbf{a}]$ существует в каждой точке векторного поля **a**. Следовательно, ротор образует векторное поле, определенное в той же части пространства, в которой задано поле вектора **a**.

Возьмем в поле вектора **a** произвольную поверхность f, ограниченную контуром Г (контур может быть любым, не обязательно плоским). Разобьем эту поверхность на малые элементы Δf (рис. XI. 5). Согласно (XI. 16) для циркуляции ΔC_a по границе эле-

мента Δf можно написать выражение $\Delta C_a \approx [\nabla \mathbf{a}]_n \Delta f$, где $[\nabla \mathbf{a}]_n$ — проекция $[\nabla \mathbf{a}]$ на нормаль к данной Δf, связанную с направлением обхода правилом правого винта.

Сложим эти выражения для всех Δf. При суммировании ΔC_a интегралы $\int a_l\, dl$, взятые вдоль границы раздела соседних площадок, взаимно уничтожатся (для смежных площадок эти интегралы отличаются знаком, так как берутся в разных направлениях). Некомпенсированными останутся только интегралы $\int a_l\, dl$ для участков, совпадающих с контуром Г, ограничивающим f. Эти интегралы дадут в совокупности циркуляцию **a** по контуру Г. Сумма справа в пределе (при $\Delta f \to 0$) превратится в интеграл по поверхности. Приближенное равенство в пределе перейдет в строгое равенство. В итоге получим

$$\oint_\Gamma a_l\, dl = \int_f [\nabla \mathbf{a}]_n\, df. \qquad \text{(XI. 23)}$$

Найденное нами соотношение носит название теоремы Стокса: *циркуляция вектора* **a** *по замкнутому контуру* Г *равна потоку вектора* $[\nabla \mathbf{a}]$ *через поверхность, натянутую на контур* Г.

Поверхность, по которой берется интеграл в правой части формулы (XI. 23), может быть любой, важно лишь, чтобы она опиралась своей границей на контур Г. Направление нормали **n** должно быть согласовано с направлением обхода контура Г при интегрировании.

Применение оператора ∇ к произведению функций. При составлении формул, в которые входит ∇, нужно руководствоваться как правилами векторной алгебры, так и правилами дифференциального исчисления. Пусть, например, φ и ψ — скалярные функции точки. Тогда

$$\nabla(\varphi\psi) = \nabla_\psi(\varphi\psi) + \nabla_\varphi(\varphi\psi) \qquad \text{(XI. 24)}$$

(индекс при ∇ указывает, на какую из функций она действует). Сомножитель, на который в данном слагаемом ∇ не действует, можно вынести из-под знака ∇ (оператор ∇ действует только на величины, стоящие за ним). Тогда формула (XI. 24) примет следующий

вид: $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla_\psi\psi + \psi\nabla_\varphi\varphi$. В написанном нами выражении, очевидно, нет необходимости в индексах при ∇, так что окончательно

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi \qquad (XI.25)$$

(читается: «фи градиент пси плюс пси градиент фи»).

Применим ∇ к произведению $\varphi\mathbf{a}$. В этом случае имеется две возможности — векторы ∇ и $\varphi\mathbf{a}$ можно перемножить как скалярно, так и векторно. Соответственно получим

$$\nabla(\varphi\mathbf{a}) = \nabla_\varphi(\varphi\mathbf{a}) + \nabla_a(\varphi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\nabla\varphi + \varphi\nabla\mathbf{a} \qquad (XI.26)$$

(«а градиент фи плюс фи дивергенция а»),

$$[\nabla, (\varphi\mathbf{a})] = [\nabla_\varphi, (\varphi\mathbf{a})] + [\nabla_a, (\varphi\mathbf{a})] = \\ = [(\nabla\varphi), \mathbf{a}] + \varphi[\nabla\mathbf{a}]. \qquad (XI.27)$$

Теперь применим ∇ к произведению $[\mathbf{ab}]$, перемножив векторы сначала скалярно: $\nabla[\mathbf{ab}] = \nabla_a[\mathbf{ab}] + \nabla_b[\mathbf{ab}]$. Осуществим в каждом из слагаемых циклическую перестановку (VI.3):

$$\nabla[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}[\nabla_a\mathbf{a}] + \mathbf{a}[\mathbf{b}\nabla_b] = \mathbf{b}[\nabla_a\mathbf{a}] - \mathbf{a}[\nabla_b\mathbf{b}]$$

(во втором слагаемом мы поменяли местами $\mathbf{b}$ и ∇_b, чтобы вектор $\mathbf{b}$ оказался за оператором ∇_b, который на него действует; при этом у векторного произведения изменился знак). Опустив ненужные уже индексы, придем к формуле

$$\nabla[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}] - \mathbf{a}[\nabla\mathbf{b}] \qquad (XI.28)$$

(«бэ ротор а минус а ротор бэ»).

Умножим $[\mathbf{ab}]$ на ∇ векторно: $[\nabla[\mathbf{ab}]] = [\nabla_a[\mathbf{ab}]] + [\nabla_b[\mathbf{ab}]]$. Развернем каждое из слагаемых по формуле «бац минус цаб» (см. (VI.5)): $[\nabla[\mathbf{ab}]] = \mathbf{a}(\nabla_a\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla_a\mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla_b\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla_b\mathbf{a})$. Расставив множители так, чтобы можно было опустить индексы при ∇, получим

$$[\nabla[\mathbf{ab}]] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla\mathbf{a}). \qquad (XI.29)$$

Выражения $(\mathbf{a}\nabla)$ и $(\mathbf{b}\nabla)$ суть скалярные дифференциальные операторы. Например,

$$(\mathbf{a}\nabla) = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z} = \sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}. \qquad (XI.30)$$

Эти операторы могут применяться как к скалярным, так и к векторным функциям. В применении к скаляру φ оператор (XI. 30) дает

$$(\mathbf{a}\nabla)\varphi = \sum_i a_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \mathbf{a}(\nabla\varphi). \qquad \text{(XI. 31)}$$

При действии оператора $(\mathbf{a}\nabla)$ на вектор $\mathbf{b}$ получается выражение

$$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} = \sum_i a_i \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_i} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \mathbf{e}_k b_k\right) = \sum_k \mathbf{e}_k \sum_i a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i}. \qquad \text{(XI. 32)}$$

Применим оператор (XI. 30) к произведению скалярной функции φ и векторной функции $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{a}\nabla)(\varphi\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\nabla_\varphi)(\varphi\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\nabla_b)(\varphi\mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\nabla)\varphi + \varphi(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\nabla\varphi) + \varphi(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}. \qquad \text{(XI. 33)}$$

Полезно знать значение выражения $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{a}$ — некоторый произвольный вектор. Подставив в (XI. 32) $\mathbf{r}$ вместо $\mathbf{b}$ и приняв во внимание, что $\partial x_k/\partial x_i = \delta_{ik}$, получим

$$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r} = \sum_k \mathbf{e}_k \sum_i a_i\delta_{ik} = \sum_k \mathbf{e}_k a_k = \mathbf{a}. \qquad \text{(XI. 34)}$$

Формулы (XI. 25)—(XI. 29) мы получили легко. Сложнее обстоит дело с нахождением градиента скалярного произведения двух векторов: $\nabla(\mathbf{ab})$, так как неясно, что надо понимать под, например, выражением $\nabla_a(\mathbf{ab})$. Его нельзя трактовать как $(\nabla_a\mathbf{a})\mathbf{b}$, ибо операции перемножения $\mathbf{a}$ с $\mathbf{b}$ и применения ∇_a не переставимы. Это затруднение можно обойти, воспользовавшись вспомогательными соотношениями, вытекающими из формулы «бац минус цаб»: $[\mathbf{a}[\nabla\mathbf{b}]] = \nabla_b(\mathbf{ab}) - \mathbf{b}(\nabla_b\mathbf{a}) = \nabla_b(\mathbf{ab}) - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}$, откуда

$$\nabla_b(\mathbf{ab}) = [\mathbf{a}[\nabla\mathbf{b}]] + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}. \qquad \text{(XI. 35)}$$

Записав таким же способом $[\mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}]]$, придем к соотношению

$$\nabla_a(\mathbf{ab}) = [\mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}]] + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}. \qquad \text{(XI. 36)}$$

Подстановка соотношений (XI. 35) и (XI. 36) в формулу

$$\nabla(\mathbf{ab}) = \nabla_a(\mathbf{ab}) + \nabla_b(\mathbf{ab})$$

приводит к следующему выражению для градиента скалярного произведения векторов **a** и **b**:

$$\nabla(\mathbf{ab}) = [\mathbf{a}[\nabla\mathbf{b}]] + [\mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}]] + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}. \qquad (XI. 37)$$

Повторное применение оператора ∇. В результате воздействия оператора ∇ на скалярные или векторные функции получаются новые векторные либо скалярные функции, к которым в свою очередь может быть применен оператор ∇.

Градиент функции φ есть вектор. Следовательно, к нему могут быть применены операции и дивергенции, и ротора. Вычислим дивергенцию градиента. Согласно формулам (XI. 2) и (XI. 11)

$$\nabla(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\varphi)_i = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_i \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \Delta\varphi.$$

Таким образом,

$$\nabla(\nabla\varphi) = \Delta\varphi, \qquad (XI. 38)$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (XI. 39)$$

Из проделанных нами выкладок вытекает, что

$$\nabla^2 = \Delta. \qquad (XI. 40)$$

Однако нужно иметь в виду, что такое соотношение между операторами ∇ и Δ имеет место только в декартовых координатах. В других системах координат, например в цилиндрической или сферической, соотношение (XI. 40) не выполняется. Самым общим определением оператора Δ, справедливым в любой системе координат, является определение, вытекающее из соотношения (XI. 38), которое можно записать в виде

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi. \qquad (XI. 41)$$

Найдем rot grad φ. Согласно (XI. 22)

$$[\nabla, \nabla\varphi] = \sum_{i, k, l} \varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_l. \qquad \text{(XI. 42)}$$

Поскольку $\partial^2\varphi/\partial x_i \partial x_k = \partial^2\varphi/\partial x_k \partial x_i$, последнее выражение равно нулю, так что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \qquad \text{(XI. 43)}$$

Этого и следовало ожидать, так как $[\nabla, \nabla\varphi] = [\nabla\nabla]\varphi$, а векторное произведение вектора на самого себя равно нулю.

Вычислим дивергенцию ротора. Согласно формулам (XI. 11) и (XI. 22)

$$\nabla [\nabla \mathbf{a}] = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{m, n} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial a_n}{\partial x_m} \right) = \sum_{k, m, n} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial^2 a_n}{\partial x_k \partial x_m}.$$

Так как $\partial^2 a_n/\partial x_k \partial x_m = \partial^2 a_n/\partial x_m \partial x_k$, последнее выражение равно нулю. Следовательно,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0. \qquad \text{(XI. 44)}$$

К этому результату можно было прийти сразу, приняв во внимание, что смешанное произведение векторов (каковым является $\nabla[\nabla \mathbf{a}]$) равно объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах. Поэтому при совпадении двух сомножителей из трех такое произведение равно нулю.

Для вычисления rot rot **a** будем исходить из формул (XI. 22):

$$[\nabla [\nabla \mathbf{a}]] = \sum_{i, k, l} \varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{m, n} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial a_n}{\partial x_m} \right) \mathbf{e}_l.$$

Произведем циклическую перестановку индексов при ε так, чтобы индекс k в обоих ε оказался на последнем месте и воспользуемся соотношением (VI. 16). В итоге получим

$$[\nabla [\nabla \mathbf{a}]] = \sum_{i, l, m, n} \mathbf{e}_l \frac{\partial^2 a_n}{\partial x_i \partial x_m} \sum_k \varepsilon_{lik} \varepsilon_{mnk} =$$

$$= \sum_{i, l, m, n} \mathbf{e}_l \frac{\partial^2 a_n}{\partial x_i \partial x_m} (\delta_{lm}\delta_{in} - \delta_{ln}\delta_{im}) =$$

$$= \sum_{i, l, m, n} \mathbf{e}_l \frac{\partial^2 a_n}{\partial x_i \partial x_m} \delta_{lm}\delta_{in} - \sum_{i, l, m, n} \mathbf{e}_l \frac{\partial^2 a_n}{\partial x_i \partial x_m} \delta_{ln}\delta_{im}.$$

Осуществим суммирование по индексам m и n. В результате полученное нами выражение примет вид

$$\sum_{i,l} \mathbf{e}_l \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_i \partial x_l} - \sum_{i,l} \mathbf{e}_l \frac{\partial^2 a_l}{\partial x_i^2},$$

что можно представить следующим образом:

$$\sum_l \mathbf{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) - \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\sum_l a_l \mathbf{e}_l \right) = \nabla (\nabla \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}.$$

Итак, мы пришли к формуле

$$[\nabla [\nabla \mathbf{a}]] = \nabla (\nabla \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a} \qquad (XI.45)$$

или

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}. \qquad (XI.46)$$

Легко убедиться в том, что соотношение (XI.45) можно получить, если развернуть $[\nabla [\nabla \mathbf{a}]]$ по формуле «бац минус цаб», обращаясь при этом с ∇ как с обычным вектором.

Из (XI.46) вытекает, что

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}. \qquad (XI.47)$$

Дивергенция является скаляром. Поэтому никакой операции, кроме операции нахождения градиента, к ней применить нельзя.

Некоторые формулы векторного анализа. Найдем дивергенцию и ротор радиуса-вектора $\mathbf{r}$, а также градиент модуля $\mathbf{r}$. Приняв во внимание, что $r = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$, получим согласно (XI.2)

$$\nabla r = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial r}{\partial x_i} = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{x_i}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r, \qquad (XI.48)$$

где $\mathbf{e}_r$ — орт радиуса-вектора $\mathbf{r}$.

В соответствии с (XI.11)

$$\nabla \mathbf{r} = \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3 \qquad (XI.49)$$

(мы использовали тот факт, что $r_i = x_i$). В n-пространстве $\nabla \mathbf{r} = n$.

Легко убедиться в том, что ротор радиуса-вектора равен нулю:

$$[\nabla \mathbf{r}] = 0. \qquad \text{(XI.50)}$$

Для этого можно воспользоваться формулой (XI. 22), заменив в ней a_k через x_k. Тогда получим

$$[\nabla \mathbf{r}] = \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \mathbf{e}_l = \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl} \delta_{ik} \mathbf{e}_l.$$

Это выражение равно нулю, так как при одинаковых значениях индексов i и k обращается в нуль множитель e_{ikl}, а при различных значениях — обращается в нуль множитель δ_{ik}.

Соотношение (XI. 50) вытекает также из того, что циркуляция вектора $\mathbf{r}$ по любому контуру равна нулю. Действительно, согласно (XI. 14)

$$C_r = \oint \mathbf{r}\, d\mathbf{l} = \oint (x\,dx + y\,dy + z\,dz) = \\ = \frac{1}{2} \oint d(x^2 + y^2 + z^2).$$

Под знаком интеграла стоит полный дифференциал, поэтому интеграл равен нулю.

Теперь найдем градиент функции от r, т. е. $\nabla\varphi(r)$. Частная производная от $\varphi(r)$ по x_k имеет вид[1]) $\partial\varphi/\partial x_k = \partial\varphi/\partial r \cdot \partial r/\partial x_k = \partial\varphi/\partial r \cdot x_k/r$. Следовательно,

$$\nabla\varphi(r) = \sum_k \mathbf{e}_k \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{x_k}{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{1}{r} \sum_k \mathbf{e}_k x_k = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Приняв во внимание формулу (XI. 48), можно написать

$$\nabla\varphi(r) = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \nabla r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r. \qquad \text{(XI. 51)}$$

Пусть имеется функция расстояния между двумя точками:

$$\varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \varphi\left(\sqrt{\sum_i (x_i - x_i')^2}\right) = \varphi(R),$$

где

$$R = \sqrt{\sum (x_i - x_i')^2}.$$

---

[1]) Мы написали $\partial\varphi/\partial r$ вместо $d\varphi/dr$, поскольку может случиться, что φ, кроме r, зависит еще, скажем, от t.

Операцию нахождения градиента можно применить к этой функции двумя способами — можно производить дифференцирование либо по координатам x_i, либо по координатам x'_i. Чтобы различать эти два градиента, в первом случае мы будем пользоваться обозначением ∇, а во втором случае — обозначением ∇'. Компоненты градиента в обоих случаях имеют вид

$$(\nabla\varphi)_i = \partial\varphi/\partial R \cdot \partial R/\partial x_i, \qquad (\nabla'\varphi)_i = \partial\varphi/\partial R \cdot \partial R/\partial x'_i.$$

Очевидно, что производные $\partial R/\partial x_i$ и $\partial R/\partial x'_i$ отличаются только знаком. Отсюда заключаем, что

$$\nabla\varphi = -\nabla'\varphi. \tag{XI.52}$$

Вычислим ротор орта $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$. Представив $\mathbf{r}/r$ как произведение $\varphi = 1/r$ на $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, применим формулу (XI.27). В результате получим: $[\nabla, \mathbf{r}/r] = [\nabla(1/r), \mathbf{r}] + (1/r)[\nabla\mathbf{r}]$. Согласно (XI.51) $\nabla(1/r) = -(1/r^2)\mathbf{r}/r$. Поэтому первое слагаемое равно нулю. Второе слагаемое равно нулю в соответствии с (XI.50). Таким образом,

$$[\nabla, \mathbf{r}/r] = [\nabla\mathbf{e}_r] = 0. \tag{XI.53}$$

Теперь найдем ротор функции $\varphi(r)\mathbf{e}_r$, где $\varphi(r)$ — произвольная функция от r. Применим снова формулы (XI.27) и (XI.51):

$$[\nabla, \varphi(r)\mathbf{e}_r] = [\nabla\varphi(r), \mathbf{e}_r] + \varphi(r)[\nabla\mathbf{e}_r] = [(\partial\varphi/\partial r)\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r] + \varphi(r)[\nabla\mathbf{e}_r] = 0$$

(см. (XI.53)). Итак,

$$[\nabla, \varphi(r)\mathbf{e}_r] = 0. \tag{XI.54}$$

Пусть нам дана векторная функция $\mathbf{a}(\xi) = \sum_k a_k(\xi)\mathbf{e}_k$ скалярной величины ξ, которая в свою очередь является функцией координат x_i, $\xi = \xi(x_i)$. Найдем ротор и дивергенцию этой функции. По правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \frac{\partial a_k}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}. \tag{XI.55}$$

Согласно (XI.22)

$$[\nabla\mathbf{a}] = \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl}\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\mathbf{e}_l = \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl}\frac{\partial a_k}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\mathbf{e}_l.$$

Величина $\partial a_k/\partial\xi$ есть k-я компонента вектора $\partial\mathbf{a}/\partial\xi$, а $\partial\xi/\partial x_i$ есть i-я компонента градиента функции ξ. Следовательно,

$$[\nabla\mathbf{a}] = \sum_{i,k,l} \varepsilon_{ikl} (\nabla\xi)_i \left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\xi}\right)_k \mathbf{e}_l = \left[\nabla\xi, \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\xi}\right]$$

(мы воспользовались формулой (VI.29)). Итак, если $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\xi)$, где $\xi = \xi(x_1, x_2, x_3)$, то

$$[\nabla\mathbf{a}] = \left[\nabla\xi, \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\xi}\right]. \qquad \text{(XI.56)}$$

Для нахождения дивергенции функции $\mathbf{a}(\xi)$ будем исходить из формулы (XI.11). Учтя (XI.55), получим

$$\nabla\mathbf{a} = \sum_k \frac{\partial a_k}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial a_k}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x_k} = \sum_k \left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\xi}\right)_k (\nabla\xi)_k = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\xi}\cdot\nabla\xi. \qquad \text{(XI.57)}$$

Положив в формулах (XI.56) и (XI.57) $\xi = r$ (r — модуль радиуса-вектора), получим, что

$$[\nabla\mathbf{a}(r)] = \left[\nabla r, \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial r}\right] = \left[\mathbf{e}_r, \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial r}\right] \qquad \text{(XI.58)}$$

$$\nabla\mathbf{a}(r) = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial r}\nabla r = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial r}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \text{(XI.59)}$$

(см. (XI.48)).

Докажем формулу

$$\int_V [\nabla\mathbf{a}]\,dV = \oint_f [\mathbf{n}\mathbf{a}]\,df = \oint_f [d\mathbf{f}, \mathbf{a}], \qquad \text{(XI.60)}$$

где $\mathbf{a}$ — некоторая векторная функция, V — произвольный объем, f — ограничивающая его поверхность, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к элементу поверхности df. Для этого умножим скалярно вектор $[\nabla\mathbf{a}]$ на произвольный постоянный вектор $\mathbf{b}$. Из формулы $\nabla[\mathbf{a}\mathbf{b}] = \mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}] - \mathbf{a}[\nabla\mathbf{b}]$ (см. (XI.28)) следует, что $\mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}] = \nabla[\mathbf{a}\mathbf{b}] + \mathbf{a}[\nabla\mathbf{b}] = \nabla[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ ($[\nabla\mathbf{b}] \neq 0$, так как $\mathbf{b} = \mathrm{const}$). Теперь проинтегрируем полученное соотношение по некоторому объему V и применим к правой части теорему Остроградского — Гаусса:

$$\int_V \mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}]\,dV = \int_V \nabla[\mathbf{a}\mathbf{b}]\,dV = \oint_f [\mathbf{a}\mathbf{b}]\,\mathbf{n}\,df.$$

Выполнив в последнем интеграле циклическую перестановку перемножаемых векторов (см. (VI.3)), получим $\int_V \mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}]\,dV = \oint_f \mathbf{b}[\mathbf{na}]\,df$. Вынесем постоянный вектор $\mathbf{b}$ за знак интеграла:

$$\mathbf{b}\int_V [\nabla\mathbf{a}]\,dV = \mathbf{b}\oint_f [\mathbf{na}]\,df.$$

Полученное соотношение должно выполняться при произвольном выборе вектора $\mathbf{b}$. Поэтому на $\mathbf{b}$ можно сократить. В результате мы придем к формуле (XI.60).

Интегральное определение оператора ∇. Рассмотрим интеграл по замкнутой поверхности f:

$$\oint \varphi\, d\mathbf{f}, \tag{XI.61}$$

где φ — произвольная скалярная функция, $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$ — элементарный вектор площадки df. Возьмем в качестве поверхности, по которой вычисляется интеграл, поверхность бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz. Тогда интеграл (XI.61) можно представить как сумму шести интегралов, каждый из которых вычисляется по одной из граней параллелепипеда. Ввиду малости граней значение φ в пределах каждой грани можно считать постоянным. Следовательно,

$$\oint \varphi\, d\mathbf{f} = \mathbf{e}_x[\varphi(x+dx,\ y,\ z) - \varphi(x,\ y,\ z)]\,dy\,dz + \mathbf{e}_y[\varphi(x,\ y+dy,\ z) - \varphi(x,\ y,\ z)]\,dx\,dz + \mathbf{e}_z[\varphi(x,\ y,\ z+dz) - \varphi(x,\ y,\ z)]\,dx\,dy = \left(\mathbf{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \nabla\varphi\, dV.$$

Отсюда получаем, что

$$\nabla\varphi = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint \varphi\, d\mathbf{f}. \tag{XI.62}$$

В соответствии с формулой (XI.62) оператор ∇ можно определить следующим образом:

$$\nabla = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint d\mathbf{f}. \tag{XI.63}$$

Возьмем некоторый объем V и разобьем его на элементарные объемы ΔV. Согласно формуле (XI. 62) для каждого объема выполняется приближенное равенство $\nabla\varphi \cdot \Delta V \approx \oint \varphi \, d\mathbf{f}$.

Теперь просуммируем это равенство по всем элементарным объемам. При суммировании правые части, соответствующие поверхностям раздела соседних объемов, взаимно уничтожатся. Останутся некомпенсированными только члены, отвечающие внешней поверхности. Поэтому, перейдя к пределу, при котором все $\Delta V \to 0$, мы придем к соотношению

$$\int_V \nabla\varphi \, dV = \oint_f \varphi \, d\mathbf{f}. \qquad \text{(XI. 64)}$$

Согласно (XI. 64) интеграл от скалярной функции φ по замкнутой поверхности f можно преобразовать в интеграл по заключенному в ней объему, заменив элемент поверхности $d\mathbf{f}$ оператором ∇dV. При этом компоненты $d\mathbf{f}$ претерпевают преобразование

$$df_i \to dV \frac{\partial}{\partial x_i}. \qquad \text{(XI. 65)}$$

Разумеется, возможно и обратное преобразование.

Аналогично обстоит дело и с интегралом от векторной функции. Действительно, согласно теореме Остроградского — Гаусса (см. (XI. 13)) $\int_V \nabla\mathbf{a} \, dV = \oint_f \mathbf{a} \, d\mathbf{f}$, что также согласуется с (XI. 65).

Вообще преобразование (XI. 65) допустимо всегда, независимо от конкретного вида выражений, стоящих под знаком интегралов. Примером такого преобразования может служить соотношение (XI. 60).

Криволинейные координаты. Иногда бывает удобно определять положение точки не декартовыми координатами x_1, x_2, x_3, а тремя другими числами q_1, q_2, q_3, более соответствующими характеру рассматриваемой задачи. Эти числа называются *криволинейными координатами точки.*

Наложив (если в том возникает необходимость) ограничения на область изменения криволинейных координат, можно добиться взаимно однозначного соответствия переменных x_i и q_i. Тогда $q_i = q_i(x_1, x_2, x_3)$, $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Поверхности, которые описываются уравнением $q_i(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$, называются *координатными поверхностями*. Линии пересечения двух координатных поверхностей называются *координатными линиями*. Вдоль координатной линии изменяется только одна координата, остальные две остаются неизменными.

Примером криволинейных координат может служить сферическая система: r, ϑ, φ. В этом случае координатными поверхностями являются: 1) сферы, $r = \text{const}$, 2) полуконусы, $\vartheta = \text{const}$, 3) полуплоскости, $\varphi = \text{const}$. Координатные линии представляют собой: 1) радиусы — линии r, 2) меридианы — линии ϑ, 3) параллели — линии φ.

Если координатные линии в каждой точке взаимно перпендикулярны, криволинейные координаты называются *ортогональными*. Мы ограничимся рассмотрением только ортогональных координат. Сферические и цилиндрические координаты принадлежат к их числу.

Введем для каждой точки P орты $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$, направленные по касательным к координатным линиям в данной точке в сторону возрастания соответствующих переменных q_i. В силу ортогональности для ортов $\mathbf{e}_i^*$ выполняются соотношения

$$\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_k^* = \delta_{ik}. \qquad \text{(XI. 66)}$$

Определим производную радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ по координате q_i. Остальные две координаты при дифференцировании не изменяются. Следовательно, при сообщении координате q_i приращения δq_i конец вектора $\mathbf{r}$ перемещается вдоль координатной линии q_i. Поэтому вектор $\partial\mathbf{r}/\partial q_i$ направлен по касательной к координатной линии q_i, т. е. коллинеарен с $\mathbf{e}_i^*$. Обозначив модуль вектора $\partial\mathbf{r}/\partial q_i$ символом H_i, можно написать, что

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i \mathbf{e}_i^* \quad (i = 1, 2, 3). \qquad \text{(XI. 67)}$$

Представив $\mathbf{r}$ в виде $\sum x_k \mathbf{e}_k$ ($\mathbf{e}_k$ — орты декартовых координатных осей), можно написать, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \mathbf{e}_k = H_i \mathbf{e}_i^* \quad (i = 1, 2, 3).$$

Возведя это соотношение в квадрат, получим

$$H_i^2 = \sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)^2 \quad (i = 1, 2, 3). \qquad \text{(XI. 68)}$$

Величины H_i называются *коэффициентами Ламе*. Их значения можно найти по формуле (XI. 68), если известен вид функций $x_k = x_k(q_i)$. Например, в случае сферической системы координат $x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $x_3 = r \cos \vartheta$. Отсюда

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_1} = \frac{\partial x_1}{\partial r} = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = \frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial q_1} = \frac{\partial x_3}{\partial r} = \cos \vartheta,$$

так что согласно (XI. 68)

$$H_1^2 = (\sin \vartheta \cos \varphi)^2 + (\sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (\cos \vartheta)^2 = 1.$$

Проделав аналогичные выкладки для H_2 и H_3, получим

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \vartheta. \qquad \text{(XI. 69)}$$

Найдем квадрат расстояния ds между двумя точками. Согласно (XI. 67)

$$d\mathbf{r} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i = \sum_i H_i \mathbf{e}_i^* dq_i. \qquad \text{(XI. 70)}$$

Следовательно,

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = \sum_i H_i^2 dq_i^2. \qquad \text{(XI. 71)}$$

Для сферической системы координат эта формула дает

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2. \qquad \text{(XI. 72)}$$

Проведем через начало и конец вектора $d\mathbf{r}$ координатные поверхности. В результате получится беско-

нечно малый параллелепипед, ребра которого согласно (XI. 70) равны

$$dl_i = H_i\, dq_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(XI. 73)}$$

Грани этого параллелепипеда будут иметь площадь

$$df_1 = H_2 H_3\, dq_2\, dq_3, \quad df_2 = H_3 H_1\, dq_3\, dq_1, \quad df_3 = H_1 H_2\, dq_1\, dq_2. \qquad \text{(XI. 74)}$$

Объем же параллелепипеда равен

$$dV = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3. \qquad \text{(XI. 75)}$$

Вместо вычисления по формулам (XI. 68) коэффициенты Ламе можно находить с помощью выражений (XI. 73). Так, например, в случае сферических координат (рис. XI. 6) элементарный параллелепипед имеет ребра $dl_1 = dr$, $dl_2 = r d\vartheta$, $dl_3 = r \sin\vartheta d\varphi$, откуда для коэффициентов Ламе сразу получаются значения (XI. 69).

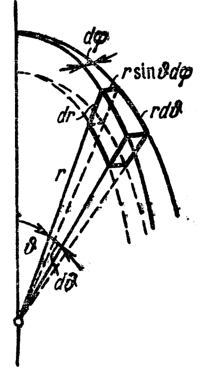


Рис. XI. 6

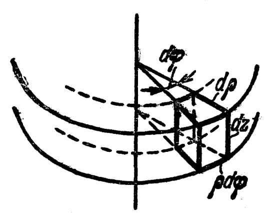


Рис. XI. 7

В случае цилиндрической системы координат (рис. XI. 7) ребра элементарного параллелепипеда равны $dl_1 = d\rho$, $dl_2 = \rho d\varphi$, $dl_3 = dz$, откуда

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1. \qquad \text{(XI. 76}$$

Найдем выражение градиента в криволинейных координатах. Согласно формуле (XI. 5) проекция градиента функции ψ на направление орта $\mathbf{e}_i^*$ равна $\partial\psi/\partial l_i$. Приняв во внимание (XI. 73), получим, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial l_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}.$$

Сам же градиент определяется формулой

$$\nabla\psi = \sum_i \frac{\partial\psi}{\partial l_i} \mathbf{e}_i^* = \sum_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial\psi}{\partial q_i} \mathbf{e}_i^*. \qquad \text{(XI. 77)}$$

Следовательно, в сферической системе координат

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \qquad \text{(XI. 78)}$$

а в цилиндрической системе

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z} \mathbf{e}_z. \qquad \text{(XI. 79)}$$

Для определения дивергенции в криволинейных координатах будем исходить из определения (XI. 7), согласно которому

$$\nabla\mathbf{a} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_f \mathbf{a}\, d\mathbf{f} = \lim_{V\to 0} \frac{\Phi}{V}. \qquad \text{(XI. 80)}$$

В качестве V возьмем объем бесконечно малого параллелепипеда, заключающего в себе точку P, для которой вычисляется дивергенция. Рассуждая так же, как при получении формулы (XI. 11), напишем выражение для потока через грани, перпендикулярные к орту $\mathbf{e}_1^*$:

$$\Phi_1 = a_1' \Delta f_1' - a_1'' \Delta f_1'' =$$
$$= (a_1 H_2 H_3)' \Delta q_2 \Delta q_3 - (a_1 H_2 H_3)'' \Delta q_2 \Delta q_3$$

(см. (XI. 74)). Здесь a_1 — проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{e}_1^*$. Одним штрихом помечены значения величин, относящиеся к одной из противолежащих друг другу граней, двумя штрихами — значения, относящиеся к другой грани.

Разложив $a_1 H_2 H_3$ в ряд в окрестности точки P, получим

$$\Phi_1 = \frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 + \varepsilon_1 =$$
$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} V + \varepsilon_1,$$

где V — объем параллелепипеда (см. (XI. 75)), ε_1 — величина более высокого порядка малости, чем V. Аналогично вычисляются потоки через две другие

пары граней:

$$\Phi_2 = \frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial (a_2H_3H_1)}{\partial q_2} V + \varepsilon_2,$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial (a_3H_1H_2)}{\partial q_3} V + \varepsilon_3.$$

Подставив $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ в (XI.80) и осуществив предельный переход, придем к формуле

$$\nabla \mathbf{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3} \left\{ \frac{\partial (a_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3H_1H_2)}{\partial q_3} \right\}. \tag{XI.81}$$

Приняв во внимание (XI.69), получим выражение для дивергенции в сферических координатах:

$$\nabla \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta a_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \tag{XI.82}$$

В цилиндрических координатах

$$\nabla \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{XI.83}$$

Согласно (XI.16) проекция ротора на направление орта $\mathbf{e}_i^*$ определяется выражением

$$[\nabla \mathbf{a}]_i = \lim_{f_i \to 0} \frac{1}{f_i} \oint \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \lim_{f_i \to 0} \frac{C_i}{f_i}, \tag{XI.84}$$

где f_i — площадка, перпендикулярная к $\mathbf{e}_i^*$, C_i — циркуляция вектора $\mathbf{a}$ по контуру, ограничивающему эту площадку.

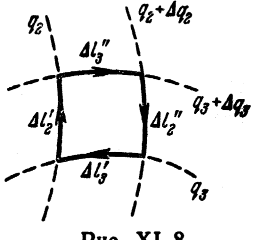


Рис. XI. 8

Чтобы вычислить проекцию $[\nabla \mathbf{a}]$ на орт $\mathbf{e}_1^*$, возьмем f_1 в виде бесконечно малого криволинейного прямоугольника со сторонами $\Delta l_2 = H_2 \Delta q_2$ и $\Delta l_3 = H_3 \Delta q_3$. Циркуляция $\mathbf{a}$ по контуру этого прямоугольника может быть представлена в виде четырех интегралов вида $\int \mathbf{a}\, d\mathbf{l}$. Два из них берутся по противоположным сторонам $\Delta l_2'$ и $\Delta l_2''$, два — по противоположным сторонам $\Delta l_3'$ и $\Delta l_3''$ (рис. XI. 8).

В итоге, учтя (XI. 73), получим

$$C_1 = a_2' \Delta l_2' + a_3'' \Delta l_3'' - a_2'' \Delta l_2'' - a_3' \Delta l_3' =$$
$$= (a_3'' \Delta l_3'' - a_3' \Delta l_3') - (a_2'' \Delta l_2'' - a_2' \Delta l_2') =$$
$$= (a_3'' H_3'' - a_3' H_3') \Delta q_3 - (a_2'' H_2'' - a_2' H_2') \Delta q_2. \qquad \text{(XI. 85)}$$

Разложив $a_3 H_3$ и $a_2 H_2$ в ряд в окрестности точки P, для которой вычисляется ротор, можно написать, что

$$a_3'' H_3'' - a_3' H_3' = \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} \Delta q_2 + \varepsilon_3,$$
$$a_2'' H_2'' - a_2' H_2' = \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \Delta q_3 + \varepsilon_2.$$

Следовательно, выражение (XI. 85) можно представить в виде

$$C_1 = \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} \Delta q_2 \Delta q_3 - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \Delta q_3 \Delta q_2 + \varepsilon =$$
$$= \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \right\} f_1 + \varepsilon,$$

где f_1 — площадь прямоугольника (см. (XI. 74)), ε — величина более высокого порядка малости, чем f_1.

Подставив найденное нами значение C_1 в (XI. 84) и осуществив предельный переход, придем к формуле

$$[\nabla \mathbf{a}]_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \right\}.$$

Аналогичные формулы получаются для двух других проекций вектора $[\nabla \mathbf{a}]$. Все три формулы можно объединить в одну

$$[\nabla \mathbf{a}]_i = \frac{1}{H_k H_l} \left\{ \frac{\partial (a_l H_l)}{\partial q_k} - \frac{\partial (a_k H_k)}{\partial q_l} \right\} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{(XI. 86)}$$

(индексы i, k, l образуют циклическую перестановку последовательности: 1, 2, 3). Наконец, найдем выражение для оператора Лапласа в криволинейных координатах. Согласно (XI. 41) $\Delta\psi = \nabla(\nabla\psi) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi$.

Воспользовавшись формулами (XI. 81) и (XI. 77), получим

$$\Delta\psi = \nabla(\nabla\psi) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right\}. \qquad \text{(XI. 87)}$$

Подставив значения (XI. 69), получим выражение для оператора Лапласа в сферических координатах

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \qquad \text{(XI. 88)}$$

В цилиндрических координатах

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \qquad \text{(XI. 89)}$$

XII. Четырехмерные векторы и тензоры в псевдоевклидовом пространстве

В Приложениях VI и X рассматривались векторы и тензоры в евклидовом пространстве, в котором квадрат радиуса-вектора определяется выражением

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \qquad \text{(XII. 1)}$$

Если ввести тензор

$$(g_{ik}) = (\delta_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(XII. 2)}$$

выражение (XII. 1) можно представить в виде

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} g_{ik}x_i x_k. \qquad \text{(XII. 3)}$$

Тензор g_{ik} называется *метрическим тензором.*

Уравнения специальной теории относительности и электродинамики приобретают особенно простой и наглядный характер, если их представить в виде соотношений между векторами и тензорами в четырехмерном пространстве, метрика которого определяется тензором

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(XII. 4)}$$

По соображениям, которые выяснятся в дальнейшем, мы будем пользоваться следующими обозначе-

ниями. Индексы при компонентах 4-радиуса-вектора будем писать не внизу, а вверху. Символ Кронекера будем записывать в виде δ^{μ}_{ν}, т. е. один индекс ставить вверху, а другой внизу. Индексы при компонентах метрического тензора писать в зависимости от обстоятельств либо внизу, либо вверху.

При написании формул мы будем руководствоваться следующими правилами:

1. В каждой паре немых индексов (т. е. индексов, по которым осуществляется суммирование) один индекс ставить вверху, а другой внизу.

2. Свободные индексы (т. е. индексы, по которым суммирование не производится) располагать так, чтобы в обеих частях равенства они занимали одинаковое положение — вверху либо внизу.

У коэффициентов линейного преобразования компонент векторов и тензоров мы также будем ставить один индекс вверху, а другой внизу [1]). Следовательно, в отличие от формул преобразования $a'_i = \sum_k \alpha_{ik} a_k$, с которыми мы имели дело в Приложениях VI и X, мы будем писать аналогичные формулы в виде $a'^{\mu} = \sum_{\nu} \alpha^{\mu}_{\nu} a^{\nu}$.

Напомним, что согласно принятому нами условию во всех случаях, когда знак $\sum$ отсутствует, суммирование даже по парным индексам не производится.

Пространство, свойства которого определяются тензором (XII. 4), называется *псевдоевклидовым*. Координаты, а также компоненты векторов и тензоров в этом 4-пространстве мы будем различать с помощью греческих индексов μ, ν и т. д., которые могут принимать четыре значения: 0, 1, 2, 3. Латинскими индексами $i, k, \ldots$ (пробегающими значения 1, 2, 3) мы будем снабжать координаты и компоненты векторов в обычном трехмерном пространстве (в пространстве с евклидовой метрикой). Иногда мы будем использовать латинские индексы при компонентах 4-векторов и 4-тензоров, чтобы подчеркнуть, что имеются в виду ненулевые значения индексов.

---

[1]) В дальнейшем мы увидим, что один индекс вверху, а другой внизу пишутся при смешанных компонентах тензоров. Однако следует помнить, что коэффициенты линейного преобразования свойствами компонент тензора не обладают.

Определив квадрат радиуса-вектора в рассматриваемом 4-пространстве выражением, аналогичным (XII.3), и приняв во внимание (XII.4), получим

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \qquad \text{(XII.5)}$$

В качестве координаты x^0 в теории относительности принимается произведение времени t на скорость света в пустоте, а в качестве остальных координат x^i — координаты в обычном трехмерном пространстве. Таким образом,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \qquad \text{(XII.6)}$$

Приняв это во внимание, выражению (XII.5) можно придать вид

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2 = c^2t^2 - \mathbf{r}^2. \qquad \text{(XII.7)}$$

Формулы преобразования координат. При переходе к другой системе координат компоненты 4-радиуса-вектора преобразуются по линейному закону

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \alpha^{\mu}_{\nu}x^{\nu}. \qquad \text{(XII.8)}$$

Обратное преобразование осуществляется по формуле

$$x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \bar{\alpha}^{\mu}_{\nu}x'^{\nu}, \qquad \text{(XII.9)}$$

где $\bar{\alpha}^{\mu}_{\nu}$ — коэффициенты обратного преобразования.

Ввиду инвариантности квадрата 4-радиуса-вектора должно выполняться условие $\sum\limits_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = \sum\limits_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}$. Подставим сюда значения (XII.8) для x'^{μ} и x'^{ν}:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} \sum_{\rho=0}^{3} \alpha^{\mu}_{\rho}x^{\rho} \sum_{\sigma=0}^{3} \alpha^{\nu}_{\sigma}x^{\sigma}.$$

Поменяем местами справа немые индексы μ и ρ, а также ν и σ. В результате получим $\sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu =$
$= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^\mu x^\nu \sum_{\rho,\sigma=0}^{3} g_{\rho\sigma}\alpha_\mu^\rho \alpha_\nu^\sigma$.

Отсюда вытекают условия, которым должны удовлетворять коэффициенты линейного преобразования (XII.8),

$$\sum_{\rho,\sigma=0}^{3} g_{\rho\sigma}\alpha_\mu^\rho \alpha_\nu^\sigma = g_{\mu\nu}.$$

Приняв во внимание, что $g_{\rho\sigma}$ отличны от нуля только при $\rho=\sigma$ (см. (XII.4)), это соотношение можно упростить следующим образом:

$$\sum_{\rho=0}^{3} g_{\rho\rho}\alpha_\mu^\rho \alpha_\nu^\rho = g_{\mu\nu} \qquad (\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(XII. 10)}$$

Например, для $\mu = \nu = 0$ по этой формуле получается, что

$$(\alpha_0^0)^2 - (\alpha_0^1)^2 - (\alpha_0^2)^2 - (\alpha_0^3)^2 = 1, \qquad \text{(XII. 11)}$$

а для $\mu = 1,\ \nu = 2$

$$\alpha_1^0\alpha_2^0 - \alpha_1^1\alpha_2^1 - \alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_1^3\alpha_2^3 = 0. \qquad \text{(XII. 12)}$$

Отметим, что, взяв в качестве $g_{\rho\sigma}$ тензор (XII.2), мы смогли бы привести формулу (XII.10) к виду $\sum_\rho \alpha_\mu^\rho \alpha_\nu^\rho = \delta_{\mu\nu}$, что совпадает с формулой (VI.40).

Очевидно, что для коэффициентов $\bar{\alpha}_\nu^\mu$ также имеют место соотношения, аналогичные (XII.10).

Теперь найдем связь между коэффициентами прямого и обратного преобразований. Напомним, что в евклидовом пространстве эта связь имеет вид $\bar{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki}$ (ср. формулы (VI.37) и (VI.38)).

Применим последовательно преобразования (XII.9) и (XII.8). В результате получим

$$x^\mu = \sum_{\rho=0}^{3} \bar{\alpha}_\rho^\mu x'^\rho = \sum_{\rho=0}^{3} \bar{\alpha}_\rho^\mu \sum_{\nu=0}^{3} \alpha_\nu^\rho x^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} x^\nu \sum_{\rho=0}^{3} \bar{\alpha}_\rho^\mu \alpha_\nu^\rho.$$

Компоненту x^μ можно представить как $\sum_\nu \delta^\mu_\nu x^\nu$. Отсюда следует, что

$$\sum_{\rho=0}^{3} \bar{\alpha}^\mu_\rho \alpha^\rho_\nu = \delta^\mu_\nu \quad (\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(XII. 13)}$$

Легко убедиться в том, что система уравнений (XII. 13) будет удовлетворена, если положить

$$\bar{\alpha}^0_0 = \alpha^0_0, \quad \bar{\alpha}^0_i = -\alpha^i_0, \quad \bar{\alpha}^i_0 = -\alpha^0_i, \quad \bar{\alpha}^i_k = \alpha^k_i \qquad \text{(XII. 14)}$$
$$(i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

Действительно, пусть $\mu = \nu = 0$. Тогда уравнение (XII. 13) выглядит так:

$$\sum_{\rho=0}^{3} \bar{\alpha}^0_\rho \alpha^\rho_0 = 1$$

или, с учетом (XII. 14),

$$\alpha^0_0 \alpha^0_0 - \sum_{i=1}^{3} \alpha^i_0 \alpha^i_0 = 1,$$

что согласуется с (XII. 11).

Положим $\mu = 1$, $\nu = 2$. Тогда уравнение (XII. 13) имеет вид

$$\sum_{\rho=0}^{3} \bar{\alpha}^1_\rho \alpha^\rho_2 = 0$$

или, с учетом (XII. 14),

$$-\alpha^0_1 \alpha^0_2 + \sum_{i=1}^{3} \alpha^i_1 \alpha^i_2 = 0,$$

что согласуется с (XII. 12). Аналогично можно убедиться в том, что и остальные 14 уравнений, содержащихся в (XII. 13), удовлетворяются решением (XII. 14).

Заметим, что совокупность соотношений (XII. 14) можно записать в виде одного соотношения

$$\bar{\alpha}^\mu_\nu g_{\mu\mu} = \alpha^\nu_\mu g_{\nu\nu}. \qquad \text{(XII. 15)}$$

Действительно, при $\mu = \nu = 0$ имеем $g_{\mu\mu} = g_{\nu\nu}$, поэтому $\bar{\alpha}^0_0 = \alpha^0_0$; при $\mu = 0$, $\nu = i \neq 0$, равно как и при $\mu = i \neq 0$, $\nu = 0$, будет $g_{\mu\mu} = -g_{\nu\nu}$, вследствие чего

$\alpha_i^0 = -\alpha_0^i$ и $\bar{\alpha}_0^i = -\alpha_i^0$; наконец, при $\mu = i \neq 0$, $\nu = k \neq 0$ оба множителя ($g_{\mu\mu}$ и $g_{\nu\nu}$) равны -1, так что $\bar{\alpha}_k^i = \alpha_i^k$. В итоге мы пришли к соотношениям (XII. 14).

В теории относительности рассматриваются обычно такие преобразования, при которых координаты $x^2 = y$ и $x^3 = z$ остаются неизменными ($x'^2 = x^2$ и $x'^3 = x^3$). Очевидно, что матрица коэффициентов преобразования в этом случае выглядит следующим образом:

$$[\alpha_\nu^\mu] = \begin{bmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_1^0 & 0 & 0 \\ \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(XII. 16)}$$

Матрица коэффициентов обратного преобразования имеет аналогичный вид.

Обозначим буквой p параметр, которым можно охарактеризовать различие между системами K и K'. Этим параметром может быть, например, угол поворота одной системы относительно другой. В теории относительности роль параметра p выполняет относительная скорость систем K и K'. Очевидно, что в результате предельного перехода, при котором p стремится к нулю, обе системы совпадут, так что матрица (XII. 16) примет вид

$$[\alpha_\nu^\mu]_{p\to 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\lim_{p\to 0} \alpha_0^0 = \lim_{p\to 0} \alpha_1^1 = 1, \quad \lim_{p\to 0} \alpha_1^0 = \lim_{p\to 0} \alpha_0^1 = 0. \qquad \text{(XII. 17)}$$

Четыре отличных от нуля и единицы коэффициента α_ν^μ не являются независимыми. Написав соотношение (XII. 10) для $\mu = \nu = 0$, получим, что

$$(\alpha_0^0)^2 - (\alpha_0^1)^2 = 1. \qquad \text{(XII. 18)}$$

Аналогичное соотношение имеет место и для коэффициентов обратного преобразования: $(\bar{\alpha}_0^0)^2 - (\bar{\alpha}_0^1)^2 = 1$, откуда с учетом (XII. 14) получается уравнение

$$(\alpha_0^0)^2 - (\alpha_1^0)^2 = 1. \qquad \text{(XII. 19)}$$

Теперь напишем условие (XII. 10) для $\mu=0$, $\nu=1$

$$\alpha_0^0\alpha_1^0-\alpha_0^1\alpha_1^1=0. \qquad \text{(XII. 20)}$$

Из сравнения уравнений (XII. 18) и (XII. 19) следует, что $(\alpha_0^1)^2=(\alpha_1^0)^2$, т. е. $\alpha_0^1=\pm\alpha_1^0$. Сопоставление этого условия с уравнением (XII. 20) дает два возможных варианта соотношений между коэффициентами:

1) $\alpha_0^0=\alpha_1^1$, если $\alpha_1^0=\alpha_0^1$, 2) $\alpha_0^0=-\alpha_1^1$, если $\alpha_1^0=-\alpha_0^1$.

Со свойством коэффициентов, выражаемым формулой (XII. 17), согласуется первый вариант. Следовательно, нужно принять, что $\alpha_0^0=\alpha_1^1$, $\alpha_1^0=\alpha_0^1$. Введя обозначения $\alpha_0^0=\alpha_1^1=\alpha_0$, $\alpha_1^0=\alpha_0^1=\alpha_1$, матрицу коэффициентов преобразования можно представить в виде

$$[\alpha_\nu^\mu]=\begin{bmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad \text{(XII. 21)}$$

Эта матрица содержит только один независимый коэффициент (значение которого определяется конкретным видом преобразования), поскольку $\alpha_0=\alpha_0^0$ и $\alpha_1=\alpha_1^0$ связаны соотношением (XII. 19)

$$\alpha_0^2-\alpha_1^2=1. \qquad \text{(XII. 22)}$$

Согласно (XII. 14) $\bar{\alpha}_0^0=\alpha_0^0=\alpha_0$, $\bar{\alpha}_1^0=-\alpha_0^1=-\alpha_1$. Следовательно, матрица обратного преобразования имеет вид

$$[\bar{\alpha}_\nu^\mu]=\begin{bmatrix}\alpha_0 & -\alpha_1 & 0 & 0\\ -\alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad \text{(XII. 23)}$$

Контравариантные и ковариантные векторы. Подстановка в (XII. 8) значений α_ν^μ из (XII. 21) приводит к формулам преобразования компонент 4-радиуса-вектора:

$$x'^0=\alpha_0x^0+\alpha_1x^1, \quad x'^1=\alpha_1x^0+\alpha_0x^1, \quad x'^2=x^2, \quad x'^3=x^3. \qquad \text{(XII. 24)}$$

Совокупность четырех величин a^0, a^1, a^2, a^3, преобразующихся при переходе от одной системы коорди-

нат к другой по тем же правилам, что и компоненты 4-радиуса-вектора, т. е. по формулам

$$a'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \alpha^{\mu}_{\nu} a^{\nu}, \qquad \text{(XII.25)}$$

называется *четырехмерным вектором* (*4-вектором*). Коэффициенты α^{μ}_{ν} в (XII.25) имеют те же значения, что и в (XII.8).

Компонента a^0 соответствует компоненте 4-радиуса-вектора x^0, которая в теории относительности принимается равной ct (см. (XII.6)). В связи с этим компонента a^0 называется *временнóй*. Компоненты a^1, a^2, a^3 соответствуют компонентам $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, в связи с чем носят название *пространственных*.

Подстановка в (XII.25) значений α^{μ}_{ν} из (XII.21) приводит к следующим формулам:

$$a'^0 = \alpha_0 a^0 + \alpha_1 a^1, \quad a'^1 = \alpha_1 a^0 + \alpha_0 a^1, \quad a'^2 = a^2, \quad a'^3 = a^3. \qquad \text{(XII.26)}$$

Квадрат 4-вектора определяется по аналогии с квадратом 4-радиуса-вектора (см. (XII.5)):

$$\sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu\mu} a^{\mu} a^{\mu} = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2. \qquad \text{(XII.27)}$$

Отметим, что квадрат 4-вектора может быть как положительным, так и отрицательным; в частности, он может равняться нулю.

При написании векторных формул для псевдоевклидова пространства мы сталкиваемся с большим неудобством, вызванным тем, что квадрат 4-вектора определяется выражением (XII.27), которое не может быть представлено в компактной форме как $\sum (a^{\mu})^2$. Чтобы устранить это неудобство, вводят два вида 4-векторов. Различают их тем, что у векторов одного вида индекс пишут вверху, а у векторов другого вида — внизу. Первые векторы называются контравариантными, вторые — ковариантными. Таким образом, поставив индекс при компонентах 4-радиуса-вектора вверху, мы отнесли этот вектор к категории контравариантных.

Каждому контравариантному вектору a^{μ} сопоставляется ковариантный вектор a_{μ} (и наоборот), причем

принимается, что

$$a_\mu = g_{\mu\mu} a^\mu \qquad \text{(XII. 28)}$$

(см. (XII. 4)), т. е.

$$a_0 = a^0, \quad a_1 = -a^1, \quad a_2 = -a^2, \quad a_3 = -a^3. \qquad \text{(XII. 29)}$$

Легко сообразить, что соотношению (XII. 28) можно придать вид

$$a^\mu = g^{\mu\mu} a_\mu. \qquad \text{(XII. 30)}$$

Таким образом, опускание или поднятие индекса μ при компоненте 4-вектора сопровождается умножением компоненты на $g_{\mu\mu}$ или $g^{\mu\mu}$.

С использованием контравариантных и ковариантных компонент квадрат 4-вектора (см. (XII. 27)) может быть записан следующим образом:

$$\sum_{\mu=0}^{3} a^\mu a_\mu = a^0 a_0 + a^1 a_1 + a^2 a_2 + a^3 a_3. \qquad \text{(XII. 31)}$$

По аналогии с формулой (XII. 31), которая дает произведение 4-вектора на самого себя, определяется скалярное произведение двух 4-векторов:

$$\sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b_\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = \\ = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3. \qquad \text{(XII. 32)}$$

Очевидно следующее соотношение:

$$\sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu. \qquad \text{(XII. 33)}$$

Вообще во всякой паре немых индексов можно взаимно менять местами верхний и нижний индексы.

Отметим, что при чисто пространственных поворотах (т. е. преобразованиях, не затрагивающих компоненту a^0) три пространственные компоненты 4-вектора a^μ ведут себя как компоненты вектора в трехмерном евклидовом пространстве (компонента a^0 ведет себя при этом как трехмерный скаляр). В связи с этим компоненты 4-вектора могут быть записаны в виде

$$a^\mu = (a^0, a_i) \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{(XII. 34)}$$

либо, короче,

$$a^\mu = (a^0, \mathbf{a}). \qquad \text{(XII. 35)}$$

Ковариантные компоненты того же вектора выглядят следующим образом:

$$a_\mu = (a^0, -a_i) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{XII.36}$$

или

$$a_\mu = (a^0, -\mathbf{a}). \tag{XII.37}$$

Для квадрата 4-вектора имеем выражение

$$\sum_\mu a^\mu a_\mu = (a^0)^2 - \sum_i a_i^2 = (a^0)^2 - \mathbf{a}^2, \tag{XII.38}$$

а для скалярного произведения 4-векторов

$$\sum_\mu a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a}\mathbf{b}. \tag{XII.39}$$

Легко убедиться в том, что приращение квадрата 4-вектора можно представить двумя способами:

$$\delta \sum_\mu a^\mu a_\mu = 2 \sum_\mu a^\mu \, \delta a_\mu = 2 \sum_\mu a_\mu \, \delta a^\mu. \tag{XII.40}$$

Четырехмерный градиент. Пусть нам дана скалярная функция величин x^μ:

$$\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3).$$

По правилам дифференциального исчисления приращение этой функции дается выражением

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^3} dx^3.$$

Приращение функции не может зависеть от того, в какой системе координат оно вычисляется, т. е. представляет собой инвариант. Отсюда заключаем, что величины

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^3} \tag{XII.41}$$

ведут себя при преобразованиях координат как ковариантные компоненты некоторого вектора. Этот вектор называется *4-градиентом функции* φ.

Если мы захотим ввести 4-оператор градиента (оператор ∇^*), то его ковариантные компоненты нужно определить следующим образом:

$$\nabla_0^* = \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \nabla_1^* = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \nabla_2^* = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \nabla_3^* = \frac{\partial}{\partial x^3} \tag{XII.42}$$

или

$$\nabla^*_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right), \qquad \text{(XII. 43)}$$

где ∇ — оператор градиента в трехмерном евклидовом пространстве. Тогда контравариантные компоненты оператора ∇^* будут иметь вид

$$\nabla^* = \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \nabla^{*1} = -\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \nabla^{*2} = -\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \nabla^{*3} = -\frac{\partial}{\partial x^3}, \qquad \text{(XII. 44)}$$

что можно представить следующим образом:

$$\nabla^{*\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla\right). \qquad \text{(XII. 45)}$$

Теперь мы имеем возможность пояснить существо различия между контравариантными и ковариантными векторами. В соответствии с (XII. 8) производная x'^μ по x^ν равна α^μ_ν:

$$\alpha^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \qquad \text{(XII. 46)}$$

Подставив эти значения α^μ_ν в (XII. 8), приведем формулу преобразования контравариантных компонент 4 вектора к виду

$$a'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu. \qquad \text{(XII. 47)}$$

Рассматривая некоторую скалярную функцию φ как сложную функцию вида

$$\varphi = \varphi\left[x^0\left(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\right), x^1\left(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\right), \ldots\right],$$

можно написать, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}.$$

Согласно (XII. 41) $\partial\varphi/\partial x'^\mu$ есть μ-я ковариантная составляющая градиента φ, вычисленная в системе K' (обозначим ее $(\nabla^*\varphi)'_\mu$), а $\partial\varphi/\partial x^\nu$ — ν-я ковариантная составляющая $\nabla^*\varphi$, вычисленная в системе K (обозна-

чим ее $(\nabla^* \varphi)_\nu$). Следовательно, можно написать

$$(\nabla^* \varphi)'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} (\nabla^* \varphi)_\nu. \qquad \text{(XII. 48)}$$

Сопоставление преобразований (XII. 47) и (XII. 48) показывает, что они не тождественны. В одном из них роль коэффициентов играют величины $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$, в другом — величины $\partial x^\nu / \partial x'^\mu$.

Итак, *контравариантными* называются такие векторы, компоненты которых преобразуются по закону (XII. 47), т. е. как компоненты векторов x^μ или dx^μ (как дифференциалы координат). *Ковариантными* же называются векторы, компоненты которых преобразуются по закону (XII. 48), т. е. как компоненты градиента (как .частные производные по координатам).

Выше мы видели, что если задан контравариантный вектор a^μ, то всегда можно ввести по правилу (XII. 29) соответствующий ему ковариантный 'вектор (и наоборот). Поскольку между величинами a^μ и a_μ существует тесная связь, мы будем говорить о них не как о компонентах двух разных векторов, а как о контравариантных и ковариантных компонентах одного и того же вектора.

В случае евклидовой метрики коэффициенты обратного преобразования $\bar{a}^\mu_\nu$ связаны с коэффициентами прямого преобразования α^μ_ν соотношением $\bar{a}^\mu_\nu = \alpha^\nu_\mu$. Следовательно, прямое и обратное преобразования координат имеют вид

$$x'^\mu = \sum_\nu \alpha^\mu_\nu x^\nu, \quad x^\nu = \sum_\mu \alpha^\mu_\nu x'^\mu,$$

откуда

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}.$$

Таким образом, в случае, когда пространство обладает евклидовой метрикой, коэффициенты преобразований (XII. 47) и (XII. 48) совпадают и различие между контравариантными и ковариантными векторами (а также и тензорами) исчезает.

Преобразование ковариантных компонент. При переходе от системы K к системе K' ковариантные компоненты векторов, очевидно, преобразуются, как и

контравариантные компоненты, по линейному закону. Обозначив коэффициенты преобразования ковариантных компонент символом $\tilde{\alpha}_\mu$, можно написать

$$a'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \tilde{\alpha}_\mu^\nu a_\nu. \qquad \text{(XII. 49)}$$

Найдем связь между коэффициентами преобразований контравариантных и ковариантных компонент, т. е. между величинами α_ν^μ и $\tilde{\alpha}_\mu^\nu$. Поднятие либо опускание индекса μ (или ν) при компоненте вектора сопровождается умножением этой компоненты на $g_{\mu\mu}$ (или $g_{\nu\nu}$). Поэтому выражение (XII. 49) можно преобразовать следующим образом:

$$a'^\mu g_{\mu\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} (\tilde{\alpha}_\mu^\nu g_{\nu\nu})\, a^\nu. \qquad \text{(XII. 50)}$$

Вместе с тем для контравариантных компонент имеет место соотношение

$$a'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \alpha_\nu^\mu a^\nu.$$

Умножив его левую и правую части на $g_{\mu\mu}$, получим

$$a'^\mu g_{\mu\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} (\alpha_\nu^\mu g_{\mu\mu})\, a^\nu. \qquad \text{(XII. 51)}$$

Сопоставление формул (XII. 50) и (XII. 51) дает

$$\tilde{\alpha}_\mu^\nu g_{\nu\nu} = \alpha_\nu^\mu g_{\mu\mu}. \qquad \text{(XII. 52)}$$

Приняв во внимание (XII. 4), легко получить

$$\tilde{\alpha}_0^0 = \alpha_0^0, \quad \tilde{\alpha}_i^0 = -\alpha_0^i, \quad \tilde{\alpha}_0^i = -\alpha_i^0, \quad \tilde{\alpha}_i^k = \alpha_k^i \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(XII. 53)}$$

Сравнение соотношений (XII. 15) и (XII. 52) позволяет написать

$$\tilde{\alpha}_\mu^\nu = \bar{\alpha}_\mu^\nu, \qquad \text{(XII. 54)}$$

где $\bar{\alpha}_\mu^\nu$ — коэффициенты обратного преобразования контравариантных компонент.

Выше мы видели, что $\alpha_\mu^\nu = \partial x'^\nu / \partial x^\mu$ (см. (XII. 46)). Очевидно, что

$$\tilde{\alpha}_\mu^\nu = \partial x^\nu / \partial x'^\mu.$$

Подставив это выражение в (XII. 54), получим коэффициенты прямого преобразования ковариантных компонент

$$\tilde{\alpha}_{\mu}^{\nu} = \bar{\alpha}_{\mu}^{\nu} = \partial x^{\nu}/\partial x'^{\mu},$$

что согласуется с (XII. 48).

Четырехмерные тензоры. *4-тензором второго ранга* называется совокупность 16 величин $T^{\mu\nu}$, которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по формуле

$$T'^{\mu\nu} = \sum_{\rho,\,\sigma=0}^{3} \alpha_{\rho}^{\mu}\alpha_{\sigma}^{\nu}T^{\rho\sigma}, \tag{XII.55}$$

где α_{ν}^{μ} — коэффициенты из (XII. 21) (ср. с (X. 10)). При обратном преобразовании

$$T^{\mu\nu} = \sum_{\rho,\,\sigma=0}^{3} \bar{\alpha}_{\rho}^{\mu}\bar{\alpha}_{\sigma}^{\nu}T'^{\rho\sigma}. \tag{XII.56}$$

Частным случаем 4-тензора является тензор с компонентами:

$$\Pi^{\mu\nu} = a^{\mu}b^{\nu}, \tag{XII.57}$$

где a^{μ} и b^{ν} — компоненты 4-векторов.

Компоненты 4-тензора могут быть представлены в трех видах: как контравариантные $T^{\mu\nu}$, ковариантные $T_{\mu\nu}$ и смешанные $T^{\mu}{}_{\nu}$. По аналогии с (XII. 57) поднятие или опускание временного индекса не изменяет знака компоненты, а поднимание или опускание пространственного индекса изменяет знак компоненты на обратный (ср. с (XII. 29)). Поднятие или опускание четного числа пространственных индексов, очевидно, оставляет компоненту без изменений. Таким образом,

$$T_{00} = T^{00},\quad T_{01} = -T^{01},\ \ldots,\ T_{10} = -T^{10},\quad T_{11} = T^{11},\ \ldots;$$
$$T^{0}{}_{0} = T^{00},\quad T_{0}{}^{1} = T^{01},\ \ldots,\ T^{0}{}_{1} = -T^{01},\quad T_{1}{}^{0} = -T^{10},\ \ldots$$
$$\ldots,\ T_{1}{}^{1} = T^{1}{}_{1} = -T^{11},\ \ldots \tag{XII.58}$$

Формулы преобразования ковариантных компонент тензора (XII. 57) можно получить, приняв во внима-

ние (XII.49):

$$\Pi'_{\mu\nu} = a'_\mu b'_\nu =$$
$$= \sum_\rho \tilde{\alpha}^\rho_\mu a_\rho \sum_\sigma \tilde{\alpha}^\sigma_\nu b_\sigma = \sum_{\rho,\sigma} \tilde{\alpha}^\rho_\mu \tilde{\alpha}^\sigma_\nu a_\rho b_\sigma = \sum_{\rho,\sigma} \tilde{\alpha}^\rho_\mu \tilde{\alpha}^\sigma_\nu \Pi_{\rho\sigma}.$$

Аналогично

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\rho,\sigma} \tilde{\alpha}^\rho_\mu \tilde{\alpha}^\sigma_\nu T_{\rho\sigma}, \qquad \text{(XII.59)}$$

где коэффициенты $\tilde{\alpha}^\nu_\mu$ определяются правилами (XII.53).

Таким же способом можно установить формулу

$$T'^\mu{}_\nu = \sum_{\rho,\sigma} \alpha^\mu_\rho \tilde{\alpha}^\sigma_\nu T^\rho{}_\sigma. \qquad \text{(XII.60)}$$

Из (XII.58) видно, что, вообще говоря, нужно различать смешанные компоненты $T^\mu{}_\nu$ и $T_\nu{}^\mu$, т. е. следить за тем, какой индекс — первый или второй — стоит вверху, а какой внизу. Действительно, например, в общем случае $T^1{}_0 = T^{10} \neq T^{01} = T_0{}^1$. В случае симметричных тензоров $S^{\mu\nu}$ (для которых $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$) смешанные компоненты $S^\mu{}_\nu$ и $S_\nu{}^\mu$, очевидно, совпадают, так что индексы можно располагать один над другим. В случае антисимметричных тензоров имеет место соотношение $A^\mu{}_\nu = -A_\nu{}^\mu$.

У антисимметричного 4-тензора независимыми являются 6 компонент (4 диагональных равны нулю, остальные удовлетворяют условию $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$). Следовательно, таблица компонент антисимметричного 4-тензора выглядит следующим образом:

$$(A^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ -A^{01} & 0 & A^{12} & A^{13} \\ -A^{02} & -A^{12} & 0 & A^{23} \\ -A^{03} & -A^{13} & -A^{23} & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(XII.61)}$$

Найдем формулы преобразования компонент тензора (XII.61). Согласно (XII.55) для компоненты A^{01} имеем

$$A'^{01} = \sum_{\rho,\sigma=0}^{3} \alpha^0_\rho \alpha^1_\sigma A^{\rho\sigma} = \sum_{\rho=0}^{3} \alpha^0_\rho \sum_{\sigma=0}^{3} \alpha^1_\sigma A^{\rho\sigma} =$$
$$= \alpha^0_0 \sum_{\sigma=0}^{3} \alpha^1_\sigma A^{0\sigma} + \alpha^0_1 \sum_{\sigma=0}^{3} \alpha^1_\sigma A^{1\sigma} +$$
$$+ \alpha^0_2 \sum_{\sigma=0}^{3} \alpha^1_\sigma A^{2\sigma} + \alpha^0_3 \sum_{\sigma=0}^{3} \alpha^1_\sigma A^{3\sigma}.$$

Коэффициенты α_2^0 и α_3^0 — нули (см. (XII.21)), поэтому последние две суммы будут нулями. Из четырех коэффициентов α_σ^1 отличны от нуля только два: α_0^1 и α_1^1. Следовательно, в первых двух суммах отличны от нуля только первые два слагаемых. Таким образом,

$$A'^{01} = \alpha_0^0 (\alpha_0^1 A^{00} + \alpha_1^1 A^{01}) + \alpha_1^0 (\alpha_0^1 A^{10} + \alpha_1^1 A^{11}).$$

Приняв во внимание, что $A^{00} = A^{11} = 0$, $A^{10} = -A^{01}$, и подставив α_0 вместо α_0^0 и α_1^1, а также α_1 вместо α_0^1 и α_1^0, придем к формуле

$$A'^{01} = (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) A^{01} = A^{01}$$

(см. соотношение (XII.22)). Аналогично могут быть получены формулы преобразования для остальных компонент тензора $A^{\mu\nu}$.

Формулы преобразования всех шести независимых компонент выглядят следующим образом:

$$A'^{01} = A^{01}, \quad A'^{02} = \alpha_0 A^{02} + \alpha_1 A^{12}, \quad A'^{03} = \alpha_0 A^{03} + \alpha_1 A^{13},$$
$$A'^{12} = \alpha_0 A^{12} + \alpha_1 A^{02}, \quad A'^{13} = \alpha_0 A^{13} + \alpha_1 A^{03}, \quad A'^{23} = A^{23}. \tag{XII.62}$$

Отметим, что формулы обратного преобразования отличаются от формул (XII.62) лишь знаком при членах, содержащих множитель α_1 (см. (XII.23)).

Формулы (XII.62) понадобятся нам в электродинамике.

Образуем из компонент тензора $\Pi^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu$ выражение

$$\sum_\mu \Pi^\mu{}_\mu = \sum_\mu a^\mu b_\mu.$$

Это выражение представляет собой инвариант, т. е. скаляр. Аналогично для любого тензора $T^{\mu\nu}$ выражение

$$\sum_\mu T^\mu{}_\mu = T^0{}_0 + T^1{}_1 + T^2{}_2 + T^3{}_3 \tag{XII.63}$$

является скаляром (ср. с (X.21)). Его называют *следом тензора*. Из (XII.33) следует, что $\sum \Pi^\mu{}_\mu = \sum \Pi_\mu{}^\mu$. Аналогично

$$\sum_\mu T^\mu{}_\mu = \sum_\mu T_\mu{}^\mu. \tag{XII.64}$$

Скалярным произведением 4-вектора a^ν на 4-тензор $T^{\mu\nu}$ называется 4-вектор b^μ, компоненты которого определяются по формуле

$$b^\mu = \sum_\nu T^\mu{}_\nu a^\nu. \qquad \text{(XII.65)}$$

Инвариантные 4-тензоры. Тензор, который при умножении на вектор оставляет этот вектор без изменений, естественно назвать единичным. Очевидно, что компоненты этого тензора следует принять равными

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mu = \nu, \\ 0, & \text{если} \quad \mu \neq \nu. \end{cases} \qquad \text{(XII.66)}$$

Действительно, подстановка этих значений в формулу (XII.65) дает

$$b^\mu = \sum_\nu \delta^\mu_\nu a^\nu = a^\mu,$$

как и должно быть для единичного тензора.

Из (XII.66) следует, что $\delta^\mu_\nu = \delta^\nu_\mu$, т. е. что тензор δ^μ_ν симметричный. Поэтому индексы мы расположили один над другим. След тензора δ^μ_ν равен

$$\sum_{\mu=0}^{3} \delta^\mu_\mu = 4.$$

Контравариантные и ковариантные компоненты единичного тензора принято обозначать символами $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$. Видно, что

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(XII.67)}$$

Сравнение с (XII.4) показывает, что тензор $g^{\mu\nu}$ (равно как и $g_{\mu\nu}$) есть метрический тензор.

Образуем выражение

$$\sum_\nu g_{\mu\nu} a^\nu.$$

Приняв во внимание (XII.67), найдем, что при $\mu = 0$ это выражение равно $a^0 = a_0$, а при $\mu = i$ $(i = 1, 2, 3)$

получается $-a^i = a_i$. Отсюда следует, что

$$\sum_\nu g_{\mu\nu} a^\nu = a_\mu.$$

Аналогично можно убедиться в том, что

$$\sum_\nu g^{\mu\nu} a_\nu = a^\mu.$$

Поэтому скалярное произведение векторов a^μ и b^ν можно записать любым из трех следующих способов:

$$\sum_\mu a^\mu b_\mu = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu. \qquad \text{(XII. 68)}$$

Тензоры δ^μ_ν, $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ инвариантны — их компоненты одинаковы во всех системах координат. Инвариантным является также абсолютно антисимметричный единичный 4-псевдотензор четвертого ранга $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Компоненты этого тензора определяются аналогично компонентам псевдотензора ε_{ikl} в евклидовом пространстве (см. (VI. 15)). При совпадении хотя бы двух индексов $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ равен нулю. Следовательно, из $4^4 = 256$ компонент отличны от нуля только $4! = 24$ компоненты. Полагают

$$\varepsilon^{0123} = +1. \qquad \text{(XII. 69)}$$

Остальные 23 компоненты полагают равными $+1$ либо -1 в зависимости от того, каким числом перестановок двух индексов — четным или нечетным — последовательность μ, ν, ρ, σ может быть получена из последовательности 0, 1, 2, 3. Очевидно, что 12 компонент имеют значение $+1$, а 12 — значение -1.

По принятому нами выше правилу опускание всех индексов у $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ должно изменить знак компоненты. Поэтому $\varepsilon_{0123} = -1$. Аналогично $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (из четырех индексов один обязательно имеет значение 0, остальные три — значения 1, 2, 3). Отсюда следует, что

$$\sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24. \qquad \text{(XII. 70)}$$

Теорема Остроградского — Гаусса. В евклидовом пространстве теорема Остроградского — Гаусса фор-

мулируется следующим образом (см. (XI. 13)):

$$\int\limits_V \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \oint\limits_f \sum_{i=1}^{3} a_i \, df_i \qquad \text{(XII.71)}$$

(интеграл по некоторому объему V от дивергенции вектора **a** равен потоку этого вектора через ограничивающую V поверхность f). Величины df_i суть компоненты вектора $d\mathbf{f} = \mathbf{n}\, df$. Они имеют значения $df_x = dy\,dz$, $df_y = dz\,dx$, $df_z = dx\,dy$.

Обобщением теоремы Остроградского — Гаусса на псевдоевклидово 4-пространство является соотношение

$$\int \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu} dV^* = \oint \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu \, df_\mu, \qquad \text{(XII.72)}$$

где a^μ — 4-вектор, $dV^* = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt\, dV$ — элемент объема в 4-пространстве, df^μ— компонента 4-вектора элемента гиперповерхности, ограничивающей 4-объем, по которому берется интеграл в левой части формулы. Компоненты df^μ имеют значения $df^0 = dx^1 dx^2 dx^3 = dV$, $df^1 = dx^0 dx^2 dx^3 = c\, dt\, dy\, dz$ и т. д.

Докажем с помощью теоремы Остроградского — Гаусса соотношение, которое нам понадобится в § 40. Чтобы сделать доказательство более наглядным, проведем его сначала для евклидова трехмерного пространства, а затем выполним аналогичные выкладки для 4-пространства.

Пусть имеется вектор a_i, дивергенция которого равна нулю,

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = 0.$$

Полагаем, что вектор a_i отличен от нуля в ограниченной области пространства. Согласно (XII. 71)

$$\int \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \oint\limits_f \sum_i a_i \, df_i = 0. \qquad \text{(XII.73)}$$

Уравнение (XII. 73) справедливо для произвольно взятого объема V и ограничивающей его поверхности f. Выберем в качестве V объем, заключенный между двумя бесконечными плоскостями $x_1 = x_1^{(1)} =$

$=\mathrm{const}$ и $x_1 = x_1^{(2)} = \mathrm{const}$ (рис. XII. 1, *а*). Интеграл по боковой поверхности этого объема равен нулю, так как по условию на бесконечности $a_i = 0$. Следовательно, правую часть формулы (XII. 73) можно представить в виде

$$\int\limits_{(1)} a_1\, df_1 - \int\limits_{(2)} a_1\, df_1 = 0$$

(для плоскости $x_1 = \mathrm{const}$ компоненты df_2 и df_3 равны нулю). Отсюда

$$\int\limits_{(1)} a_1\, df_1 = \int\limits_{(2)} a_1\, df_1 = \mathrm{const}.$$

Полученный нами результат означает, что интеграл $\int a_1\, df_1$, взятый по любой бесконечной плоскости $x_1 = \mathrm{const}$, имеет одинаковое значение. Заметим,

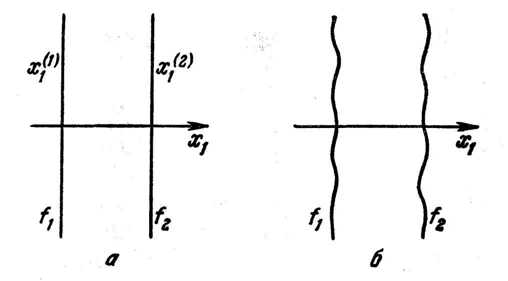


Рис. XII. 1

что координаты x_2 и x_3 при интегрировании принимают все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Теперь возьмем в качестве V объем, ограниченный двумя поверхностями произвольной формы, для всех точек которых координата x_1 конечна, координаты же x_2 и x_3 принимают значения от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, края поверхностей лежат на бесконечности (рис. XII. 1, *б*). В этом случае правая часть формулы (XII. 73) может быть представлена в виде

$$\int\limits_{f_1} \sum_i a_i\, df_i - \int\limits_{f_2} \sum_i a_i\, df_i = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\int \sum_i a_i\, df_i = \text{const}, \qquad \text{(XII.74)}$$

т. е. имеет одинаковое значение для любой поверхности, включающей в себя все двухмерное пространство x_2x_3 (пространство yz).

Теперь допустим, что имеется тензор T_{ik}, удовлетворяющий условию

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(XII.75)}$$

Компоненты T_{ik} отличны от нуля в ограниченной области пространства.

Образуем вектор **a** с компонентами

$$a_k = \sum_i T_{ik} b_i, \qquad \text{(XII.76)}$$

где b_i — компоненты произвольного постоянного вектора ($b_i = \text{const}$). Дивергенция вектора **a** будет нулем. Действительно,

$$\sum_k \frac{\partial a_k}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i T_{ik} b_i = \sum_i b_i \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

Следовательно, вектор (XII.76) удовлетворяет условиям, при которых выполняется соотношение (XII.74). Подстановка в (XII.74) значений (XII.76) дает

$$\int \sum_k a_k\, df_k = \int \sum_k \Big(\sum_i T_{ik} b_i\Big) df_k =$$

$$= \sum_i b_i \int \sum_k T_{ik}\, df_k = \text{const} \qquad \text{(XII.77)}$$

(интегрирование производится по поверхности, включающей в себя все двухмерное пространство x_2x_3).

Введя обозначение

$$p_i = \int \sum_k T_{ik}\, df_k, \qquad \text{(XII.78)}$$

соотношение (XII.77) можно записать в виде

$$\sum_i b_i p_i = \text{const}.$$

В связи с постоянством и произвольностью величин b_i последнее соотношение может выполняться лишь при условии, что все p_i также постоянны.

Таким образом, мы пришли к следующему утверждению: если тензор T_{ik} удовлетворяет условию (XII. 75) и компоненты его отличны от нуля в ограниченной области пространства, то значения компонент вектора p_i не зависят от того, по какой из поверхностей, включающих в себя все двухмерное пространство x_2x_3, осуществляется интегрирование в формуле (XII. 78).

Теперь проведем аналогичные рассуждения для 4-пространства. Пусть имеется вектор a^ν, 4-дивергенция которого равна нулю;

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial a^\nu}{\partial x^\nu} = 0 \qquad \text{(XII. 79)}$$

(a^ν отличны от нуля в ограниченной области 4-пространства). Согласно (XII. 72)

$$\int \sum_\nu \frac{\partial a^\nu}{\partial x^\nu} dV^* = \oint \sum_\nu a^\nu df_\nu = 0. \qquad \text{(XII. 80)}$$

Это уравнение справедливо для любой замкнутой гиперповерхности; интегрирование левой части производится по 4-объему, ограниченному этой гиперповерхностью. Выберем в качестве такого объема часть 4-пространства, заключенную между двумя бесконечными гиперплоскостями $x^0 = x^0_{(1)} = \text{const}$ и $x^0 = x^0_{(2)} = \text{const}$. Координаты x^1, x^2, x^3 для точек таких гиперплоскостей изменяются в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, каждая из гиперплоскостей представляет собой все трехмерное пространство, взятое в момент $t_1 = x^0_{(1)}/c$ в случае первой плоскости, и в момент $t_2 = x^0_{(2)}/c$ в случае второй плоскости.

Для выбранного 4-объема правую часть соотношения (XII. 80) можно представить в виде

$$\int_{(1)} a^0 df_0 - \int_{(2)} a^0 df_0 = 0$$

(поскольку $dx^0=0$, все $df^i=0$). Отсюда

$$\int a^0\, df_0 = \text{const}. \qquad \text{(XII.81)}$$

Это означает, что значение интеграла (XII.81) не зависит от того, по какой из гиперплоскостей $x^0=\text{const}$ осуществляется интегрирование.

Теперь возьмем 4-объем, ограниченный двумя гиперповерхностями произвольной формы, для всех точек которых координата x^0 конечна, а координаты x^1, x^2, x^3 принимают значения от $-\infty$ до $+\infty$. Такие гиперповерхности включают в себя все трехмерное пространство. Написав для такого объема правую часть соотношения (XII.80), получим

$$\int\limits_{(1)} \sum_\nu a^\nu\, df_\nu - \int\limits_{(2)} \sum_\nu a^\nu\, df_\nu = 0.$$

Отсюда следует, что интеграл

$$\int \sum_\nu a^\nu\, df_\nu = \text{const}, \qquad \text{(XII.82)}$$

т. е. не зависит от того, по какой из гиперповерхностей, охватывающих все трехмерное пространство, он берется. Иными словами, этот интеграл не изменяется со временем, его значение сохраняется.

Возьмем в качестве a^ν 4-вектор с компонентами

$$a^\nu = \sum_\mu T^{\mu\nu} b_\mu, \qquad \text{(XII.83)}$$

где b_μ — компоненты произвольного постоянного 4-вектора ($b_\mu=\text{const}$), а $T^{\mu\nu}$ — 4-тензор, удовлетворяющий условию

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad \text{(XII.84)}$$

Компоненты этого тензора предполагаются отличными от нуля в ограниченной области 4-пространства. Легко убедиться в том, что вектор (XII.83) удовлетворяет условию (XII.79). Следовательно, для него должно выполняться соотношение (XII.82). Подстановка в

(XII. 82) значений (XII. 83) дает

$$\int \sum_{\nu} a^{\nu} df_{\nu} = \int \sum_{\nu} \left(\sum_{\mu} T^{\mu\nu} b_{\mu} \right) df_{\nu} =$$

$$= \sum_{\mu} b_{\mu} \int \sum_{\nu} T^{\mu\nu} df_{\nu} = \text{const}$$

(интегрирование производится по произвольной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство).

Если ввести обозначение

$$p^{\mu} = \int \sum_{\nu} T^{\mu\nu} df_{\nu}, \qquad \text{(XII. 85)}$$

полученное нами соотношение можно представить в виде

$$\sum_{\mu} b_{\mu} p^{\mu} = \text{const}.$$

Вследствие произвольности и постоянства величин b_{μ} последнее условие может выполняться только в том случае, если постоянными (т. е. не зависящими от времени) будут все p^{μ}. Таким образом, мы приходим к следующему выводу. Если имеется тензор $T^{\mu\nu}$, компоненты которого отличны от нуля только в ограниченной области 4-пространства и удовлетворяют условию (XII. 84), то компоненты 4-вектора (XII. 85) сохраняются, т. е. не изменяют своего значения со временем. Очевидно, что будет сохраняться также 4-вектор с компонентами

$$p^{\mu} = \alpha \int \sum_{\nu} T^{\mu\nu} df_{\nu}, \qquad \text{(XII. 86)}$$

где α — произвольная константа.

XIII. Дельта-функция Дирака

Дельта-функцией Дирака (δ-функцией) называется функция, определяемая следующим образом: $\delta(x) = 0$ при всех x, отличных от нуля; при $x = 0$ функция $\delta(x)$ обращается в бесконечность, причем так, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1. \qquad \text{(XIII. 1)}$$

Дельта-функция оказывается полезной в силу следующего свойства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0), \qquad \text{(XIII. 2)}$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывная функция от x. Это свойство вытекает из определения δ-функции. Действительно, вследствие того, что $\delta(x)=0$ при всех $x \neq 0$, отличный от нуля вклад в интеграл (XIII. 2) вносит лишь окрестность точки $x=0$. В этой окрестности $f(x)$ можно положить равной $f(0)$. Вынеся $f(0)$ за знак интеграла и приняв во внимание (XIII. 1), придем к (XIII. 2).

Очевидно, что функция $\delta(x-a)$ обладает в окрестности точки $x=a$ теми же свойствами, что и функция $\delta(x)$ в окрестности точки $x=0$. В частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a). \qquad \text{(XIII. 3)}$$

Область интегрирования в формулах (XIII. 2) и (XIII. 3) не обязательно должна простираться от $-\infty$ до $+\infty$, достаточно, чтобы эта область включала в себя особую точку, в которой δ-функция отлична от нуля.

Подобно тому как мы ввели $\delta(x)$, определяется трехмерная δ-функция, обозначаемая $\delta(\mathbf{r})$. Она равна нулю всюду, кроме начала координат. В начале координат $\delta(\mathbf{r})$ обращается в бесконечность таким образом, что

$$\int \delta(\mathbf{r})\,dV = 1. \qquad \text{(XIII. 4)}$$

Интегрирование производится по всему трехмерному пространству.

Трехмерную δ-функцию можно представить как произведение трех одномерных функций:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z). \qquad \text{(XIII.5)}$$

Из определения функции $\delta(\mathbf{r})$ следует, что

$$\int f(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,dV = f(\mathbf{r}_0). \qquad \text{(XIII. 6)}$$

Область интегрирования в формуле (XIII.6) не обязательно должна охватывать все трехмерное пространство, достаточно, чтобы эта область включала в себя точку, определяемую вектором $\mathbf{r}_0$.

XIV. Ряд и интеграл Фурье

Функцию, удовлетворяющую условию

$$f(t+T)=f(t), \qquad \text{(XIV.1)}$$

где T — константа, называют *периодической* [1]. Величина T именуется *периодом* функции. Простейшим примером периодической функции является гармоническая функция $f(t)=a\cos(\omega t+\alpha)$, где $\omega=2\pi/T$ — круговая частота функции.

Подавляющее большинство периодических функций, встречающихся в физических задачах, можно представить в виде ряда

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t). \qquad \text{(XIV.2)}$$

Для краткости записи применено обозначение

$$\omega_0=2\pi/T \quad (T \text{ — период функции}). \qquad \text{(XIV.3)}$$

Ряд (XIV.2) называется *рядом Фурье*. Постоянные величины a_n и b_n называются коэффициентами Фурье. Условия, которым должна удовлетворять функция для того, чтобы ее значения совпадали со значениями ряда (XIV.2), мы обсуждать не станем, отослав интересующихся этим вопросом к руководствам по математическому анализу.

Непериодическую функцию также можно представить в виде ряда Фурье. Однако такое представление будет пригодно для непериодической функции лишь на отрезке от $-T/2$ до $+T/2$.

Выражение (XIV.2) представляет собой разложение функции $f(t)$ в ряд по функциям

$$1,\ \cos\omega_0 t,\ \sin\omega_0 t,\ \ldots,\ \cos n\omega_0 t,\ \sin n\omega_0 t,\ \ldots \qquad \text{(XIV.4)}$$

Система функций (XIV.4) является ортогональной на отрезке $-T/2$, $+T/2$. Это означает, что интеграл по

[1]) Имея в виду приложения, мы обозначили независимую переменную буквой t, а не x.

этому отрезку от произведения двух различных функций системы равен нулю, а аналогичный интеграл от квадрата любой функции отличен от нуля. Кратко свойство ортогональности можно записать в виде

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \psi_n \psi_m \, dt = \delta_{nm} q_n .$$

Здесь ψ_n и ψ_m — любые функции, принадлежащие системе (XIV.4). Легко убедиться в том, что $q_0 = T$, $q_n = T/2$ $(n \neq 0)$. Для этого достаточно учесть, что средние значения квадрата косинуса и квадрата синуса равны 1/2.

Ортогональность системы функций (XIV.4) позволяет найти значения коэффициентов Фурье. Умножим соотношение (XIV.2) на функцию $\cos m\omega_0 t$ $(m \neq 0)$ и затем проинтегрируем на отрезке $[-T/2, +T/2]$. В силу ортогональности из всех интегралов в правой части будет отличен от нуля только один, а именно

$$\int_{-T/2}^{+T/2} a_m \cos^2 m\omega_0 t \, dt = a_m \cdot T/2.$$

Поэтому мы придем к формуле $\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos m\omega_0 t \, dt = a_m \cdot T/2$, откуда

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos m\omega_0 t \, dt \qquad (m \neq 0). \qquad \text{(XIV.5)}$$

Аналогичные выкладки приводят к выражениям для b_m и a_0:

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin m\omega_0 t \, dt \qquad (m \neq 0), \qquad \text{(XIV.6)}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \, dt, \quad b_0 = 0. \qquad \text{(XIV.7)}$$

Ряд Фурье можно записать в комплексной форме. Для этого заменим косинус и синус через экспоненты:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{\exp(in\omega_0 t) + \exp(-in\omega_0 t)}{2},$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{\exp(in\omega_0 t) - \exp(-in\omega_0 t)}{2i}.$$

Тогда выражение, стоящее под знаком суммы в формуле (XIV. 2), примет вид

$$a_n \frac{\exp(in\omega_0 t) + \exp(-in\omega_0 t)}{2} + \\ + b_n \frac{\exp(in\omega_0 t) - \exp(-in\omega_0 t)}{2i} = \\ = \frac{a_n + ib_n}{2} \exp(-in\omega_0 t) + \frac{a_n - ib_n}{2} \exp(in\omega_0 t) = \\ = C_n \exp(-in\omega_0 t) + C_{-n} \exp(in\omega_0 t). \quad \text{(XIV. 8)}$$

Вместо коэффициентов a_0, a_n и b_n мы ввели коэффициенты

$$C_0 = a_0, \quad C_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (n \neq 0). \quad \text{(XIV. 9)}$$

Заметим, что

$$C_{-n} = C_n^* \quad \text{(XIV. 10)}$$

(звездочка обозначает комплексно сопряженную величину).

Произведя в (XIV. 2) замену (XIV. 8), получим

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(-in\omega_0 t). \quad \text{(XIV. 11)}$$

Выражение (XIV. 11) представляет собой разложение функции $f(t)$ в ряд по функциям

$$1, \exp(\pm i\omega_0 t), \exp(\pm i2\omega_0 t), \ldots \quad \text{(XIV. 12)}$$

Система функций (XIV. 12) также является ортогональной на отрезке $[-T/2, +T/2]$. В случае комплексных функций это означает, что $\int_{-T/2}^{+T/2} \psi_n \psi_m^* \, dt = \delta_{nm} q_n$ $(q_n \neq 0)$. Действительно, легко убедиться

в том, что

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \exp(i(n-m)\omega_0 t)\,dt = \delta_{nm}T. \qquad \text{(XIV. 13)}$$

Ортогональность системы функций (XIV. 12) позволяет найти значения коэффициентов C_n. Умножим соотношение (XIV. 11) на $\exp(im\omega_0 t)$ и затем проинтегрируем на отрезке $[-T/2, +T/2]$. В силу ортогональности из всех интегралов в правой части будет отличен от нуля только один, а именно

$$\int_{-T/2}^{+T/2} C_m \exp(-i(m-m)\omega_0 t)\,dt = C_m T.$$

Поэтому мы придем к формуле $\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\exp(im\omega_0 t)\,dt = C_m T$, откуда

$$C_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\exp(im\omega_0 t)\,dt. \qquad \text{(XIV. 14)}$$

Формула для C_{-m} получается из (XIV. 14) заменой m на $-m$. Значение коэффициента C_0 также можно найти по формуле (XIV. 14), положив в ней $m = 0$.

Хотя все слагаемые в (XIV. 11) (кроме C_0) комплексные, сама сумма в силу свойства (XIV. 10) является вещественной. Чтобы убедиться в этом, напишем (XIV. 11) в виде

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \exp(-in\omega_0 t) + C_{-n}\exp(in\omega_0 t)) =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n \exp(-in\omega_0 t) + (C_n \exp(in\omega_0 t))^*\}$$

(мы использовали соотношение (XIV. 10)). Но сумма некоторой величины и ее комплексно сопряженной всегда является вещественной величиной. Таким образом, вещественность суммы (XIV. 11) доказана.

Всякая вещественная величина равна своей комплексно сопряженной. Поэтому выражение (XIV. 11)

можно видоизменить следующим образом:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^* \exp\left(in\omega_0 t\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{-n} \exp\left(in\omega_0 t\right). \tag{XIV. 15}$$

Полученное выражение отличается от (XIV. 11) лишь тем, что в нем слагаемые поставлены в обратной последовательности. Если в (XIV. 9) поменять местами обозначения C_n и C_{-n}, то формула (XIV. 11) приняла бы вид

$$f(t)=\sum_{n=\infty}^{+\infty} C_n \exp(in\omega_0 t). \tag{XIV. 16}$$

Одновременно формула (XIV. 14) изменилась бы следующим образом:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\exp(-in\omega_0 t)\,dt. \tag{XIV. 17}$$

Очевидно, что формулы (XIV. 16) и (XIV. 17) эквивалентны формулам (XIV. 11) и (XIV. 14). В курсах математики обычно пишут ряд Фурье в виде (XIV. 16) и соответственно формулу для коэффициентов в виде (XIV. 17). В физике предпочтительнее формулы (XIV. 11) и (XIV. 14).

Ряд (XIV. 11) представляет периодическую функцию на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$, либо непериодическую функцию на ограниченном промежутке $[-T/2, +T/2]$. Непериодическая функция может быть представлена на бесконечном интервале с помощью интеграла Фурье.

Введем обозначения

$$2\pi n/T=n\omega_0=\omega_n, \quad 2\pi/T=\omega_0=\Delta\omega. \tag{XIV. 18}$$

Перепишем выражение (XIV. 14) с учетом этих обозначений. Кроме того, обозначим переменную интегрирования вместо t буквой ξ. Тогда

$$C_n=\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-T/2}^{+T/2} f(\xi)\exp(i\omega_n\xi)\,d\xi$$

(в соответствии с (XIV. 18) мы заменили $1/T$ на $\Delta\omega/2\pi$). Подставим это выражение в (XIV. 11):

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-i\omega_n t)\,\Delta\omega\int_{-T/2}^{+T/2}f(\xi)\exp(i\omega_n\xi)\,d\xi. \tag{XIV. 19}$$

Теперь устремим T к бесконечности. Согласно (XIV. 18) $\Delta\omega$ будет стремиться к нулю, так что совокупность дискретных значений ω_n превратится в совокупность значений непрерывно изменяющейся переменной ω. Соответственно сумма по n превратится в интеграл. В итоге формула (XIV. 19) примет вид

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\omega t)\,d\omega\int_{\infty}^{+\infty}f(\xi)\exp(i\omega\xi)\,d\xi. \tag{XIV. 20}$$

Полученное нами выражение и есть интеграл Фурье. Если ввести обозначение

$$\varphi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\exp(i\omega\xi)\,d\xi, \tag{XIV. 21}$$

интеграл Фурье запишется следующим образом[1]):

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega. \tag{XIV. 22}$$

Так же как и в случае ряда Фурье, в курсах математики формула (XIV. 22) пишется обычно со знаком плюс в показателе степени. Соответственно в формуле (XIV. 21) в показателе степени пишут знак минус.

Если две функции φ и f связаны выражением вида

$$\varphi(x)=\int_a^b f(t)\,K(x,\,t)\,dt, \tag{XIV. 23}$$

---

[1]) Встречается также несимметричная запись интеграла Фурье, а именно, формулы (XIV. 21) и (XIV. 22) пишутся в виде

$$\varphi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\exp(i\omega\xi)\,d\xi,\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega\,.$$

то функция $\varphi(x)$ называется интегральным преобразованием функции $f(t)$, а функция $K(x, t)$ — ядром интегрального преобразования.

Из сравнения формул (XIV. 21) и (XIV. 23) следует, что определяемая выражением (XIV. 21) функция $\varphi(\omega)$ представляет собой интегральное преобразование функции $f(\xi)$, причем ядро преобразования имеет вид

$$K(\omega, \xi) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \exp(i\omega\xi).$$

Поэтому функцию $\varphi(\omega)$ называют *преобразованием Фурье* функции $f(\xi)$. Определяемую выражением (XIV. 22) функцию $f(t)$ называют *обратным преобразованием Фурье*. Отметим, что прямое (формула (XIV. 21) и обратное (формула (XIV. 22)) преобразования Фурье отличаются только знаком при показателе экспоненты.

Функцию $f(\xi)$ в выражении (XIV. 21) называют также *фурье-образом* функции $\varphi(\omega)$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебраическое дополнение элемента определителя 393
Амплитуда комплексная 71
Апекс 128
Апериодический процесс 74
Апериодическое затухание 74

Вариация функционала 348
Вектор в пространстве *n* измерений 378
— заряда — тока 249
— ковариантный 465, 469
— контравариантный 465, 469
— Пойнтинга 240, 243, 292
— четырехмерный 465
Виртуальное перемещение 344
Волновая зона 332
Волновое число комплексное 301
Волновой вектор четырехмерный 295
Волчок асимметричный 103
— симметричный 103, 121, 125
— — свободный 120, 123
— шаровой 103
Восприимчивость диэлектрическая 193
— магнитная 223
Время запаздывания системы 327
— — собственное 327

Гамильтониан 131, 139
Гипербола 357
Главные оси инерции 102
Градиент 430
— четырехмерный 467

Движение инфинитное 48
— финитное 48
Действие 33, 136, 138
— для электромагнитного поля 271, 272
— укороченное 139

Дельта-функция Дирака 481
Детерминант 392
Дивергенция 433, 436
—, выражение в сферических координатах 456
Дипольный момент системы электрических зарядов 183
Дискриминант квадратичной формы 403
Диссипативная функция Рэлея 16
Диссипация энергии 72
Дифференциальное эффективное сечение рассеяния 58
Дифференциальный эффективный поперечник рассеяния 58

Задача Ковалевской 126
— Лагранжа 126
— Эйлера 126
Закон Био — Савара 212
— сохранения импульса 39
— — момента импульса 41
— — энергии 37
Заряды свободные 188
— связанные 188

Излучение дипольное 334, 341
— квадрупольное 339, 341
— магнитно-дипольное 338
Импульс обобщенный 23, 138, 282, 284
— релятивистский 158
— четырехмерный 158, 159
Инвариантность градиентная 233
— калибровочная 233
— уравнений 141
Инварианты поля 258
Индекс немой 13, 19
Индукция магнитная 200, 220
— электрическая 193
Интеграл движения 25, 37, 43
— Фурье 488
Интервал 144

Интервал времениподобный 146
— пространственноподобный 146

Калибровка кулоновская 236
— лоренцева 234
— поперечная 236
— потенциалов 233
Канонические переменные 130, 135
Квадратичная форма 402
— — каноническая 404
Квадруполь 185
Квадрупольный момент системы зарядов 187
Квант действия 34
Колебания вынужденные 76
— гармонические 70, 71
— затухающие 71
— малые 69
— нормальные 84
— свободные 69
— системы со многими степенями свободы 79
Компоненты вектора 373
— тензора 415
— четырехмерного тензора ковариантные 471
— — — контравариантные 471
— — — смешанные 471
Конические сечения 45, 356
Коэффициент затухания волны 305
— связи 89
Коэффициенты Ламе 453
Криволинейные координаты 451
— — ортогональные 452

Линейное дифференциальное уравнение 361
— — —, общее решение 361
Линия узлов 95
Л-система отсчета 52

Магнитный момент 217, 220
Масса приведенная 49
Матрица 382
— диагональная 386
— единичная 386
— квадратичной формы 403
— кососимметричная 385
— обратная 383
—, ранг 400
— симметричная 385
Матрица транспонированная 383
Матрицы коммутирующие 388
Маятник математический 29
Маятники связанные 85
Мгновенная ось вращения 94
Механическая система 7
Мировая линия 144
— точка 144
Моменты инерции главные 102
— — осевые 101
— — центробежные 102
Монополь 183
Монополи Дирака 200
Мультиполь нулевого порядка 183
— первого порядка 183

Намагниченность 220
Напряженность магнитного поля 222
— электрического поля 177
Нутация 97, 128

Обобщенная координата 8, 17, 138
— скорость 8, 17
Обобщенные координаты главные 84
— — нормальные 84
— — циклические 43
Октуполь 187
Оператор Гамильтона 432
— — четырехмерный 248
— Даламбера 248, 285
— Лапласа 444
— — в сферических координатах 458
— набла 432
— —, интегральное определение 450
Определитель 392
—, входящий в состав матрицы 400
—, порядок 392
— транспонированный 394
Орты координатных осей 38

Парабола 358
Плотность импульса электромагнитного поля 243
— потока импульса 240
— связанных зарядов объемная 191
— — — поверхностная 192

Показатель преломления комплексный 305
Поляризованность 189
Постоянная Планка 34
Потенциал векторный магнитного поля 201
— обобщенный 15
— поля диполя 184
— механической системы 13, 28
— четырехмерный 250
— электрического поля 178
Потенциалы запаздывающие 313
— Лиенара — Вихерта 321
Поток импульса 240, 292
Преобразование Фурье 489
Преобразования Галилея 142
— Лоренца 148, 150
Прецессия 97
— псевдорегулярная 129
— регулярная 97, 122, 128
Принцип вариационный 34
— Гамильтона 33, 34
— наименьшего действия 9, 33, 130
— относительности Галилея 142
— — Эйнштейна 141, 143
— постоянства скорости света 141
Прицельное расстояние 57
Прицельный параметр 57
Произведение векторов векторное 365, 373
— — скалярное 365, 372
— — смешанное 365
— двойное векторное 367
— тензоров внешнее 418
— — внутреннее 418
— — скалярное 418
Проницаемость диэлектрическая 194
— — комплексная 303
— магнитная 223
Пространство конфигурационное 17, 34
— псевдоевклидово 459
Псевдовектор 375
Псевдоскаляр 376
Псевдотензор 422

Рассеяние частиц 52, 57
Реакции связей 8, 9, 12, 17
Ротор 437, 440
Ряд Фурье 483

Свободные оси вращения 112
Связи 8, 10
— геометрические 10
— голономные 11
— жесткие 7
— идеальные 8
— кинематические 10
— неголономные 12
— нестационарные 10
— реономные 12
— склерономные 12
— стационарные 10, 12
Сила диссипативная 16
— инерции центробежная 66
— консервативная 14
— кориолисова 66
— Лоренца 15
— Минковского 155—157
— обобщенная 20, 22, 23
— потенциальная 14
Символ Кронекера 368
— — кососимметричный 369
Скаляр 417
Скобки Пуассона 134
Собственная длина 151
Собственное время 147
Соленоид 206—210
Спектральное разложение волны 306
Столкновение частиц 52

Твердое тело, 7, 11
Тензор 415
— абсолютно антисимметричный 421
— — симметричный 421
— антисимметричный 420, 429
— главные значения 416, 426
— диэлектрической восприимчивости 198
— — проницаемости 198
— единичный 417
— инвариантный 417
— инерции 98, 101, 106
— магнитной воспримчивости 225
— — проницаемости 225
— метрический 458, 474
— натяжений максвелловский 246, 279
—, приведенный к главным осям 416
—, ранг 416
—, свертка 418
— симметричный 420, 424

Тензор след 418, 473
— четырехмерный 471
—, шпур 418
— электромагнитного поля 352
— энергии-импульса 176
— — — электромагнитного поля 276, 281
Теорема Гаусса для электрического поля 179
— Крамера 398
— Остроградского — Гаусса 436, 476
— Стокса 441
— Штейнера 105
— Эйлера 345

Угол нутации 97
— отдачи 55
— прецессии 97
— разлета 55
— рассеяния 55
— собственного вращения 97
— чистого вращения 97
Уравнение волновое 286, 287
— Гамильтона — Якоби 136, 139, 140, 283
— Даламбера 236, 285
— Лапласа 181, 185
— непрерывности 213
— Пуассона 180, 196, 203, 224, 236, 237
— характеристическое 81, 82
Уравнения Гамильтона 130, 132
— канонические 130, 132
— Лагранжа 8, 9, 15, 17, 22, 34, 130
— Максвелла 237
— — в четырехмерной форме 262, 263
— Ньютона 8, 9, 17
— Эйлера 118, 120, 121, 354, 356
Условие Лоренца 234
Условия на границе двух диэлектриков 196
— — — — магнетиков 224

Фаза волны 295
Формула Резерфорда 6
Функционал 345, 346
— линейный 347
Функция Гамильтона 131, 283
— Лагранжа 8, 14, 24, 27, 35
— — для электромагнитного поля 272
Фурье-образ функции 489

Циркуляция 437
Ц-система отсчета 52

Частота собственная 71
Частоты собственные системы 82
Четырехмерная скорость 153, 154
Четырехмерное ускорение 153, 154
Число степеней свободы системы 8, 12, 17

Эйлеровы углы 95
Электромагнитная волна 286
— — немонохроматическая 306
— — плоская 287
— — — монохроматическая 293
— — плоско-поляризованная 299
— —, поляризованная по кругу 299
— — эллиптически-поляризованная 299
Эллипс 356
Энергия 24
— кинетическая 26, 27
— покоя 160
— полная системы 25
— — частицы 160
— потенциальная 13, 27, 28
— центробежная 68
— электромагнитного поля 240
Эффект Доплера 296

Игорь Владимирович САВЕЛЬЕВ

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

в двух томах

ТОМ 1

МЕХАНИКА
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Издание пятое,
стереотипное

Зав. редакцией естественнонаучной
литературы *М. В. Рудкевич*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 04.04.18.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат $84\times108^{1}/_{32}$.
Печать высокая. Усл. п. л. 26,04. Тираж 100 экз.

Заказ № 241-18.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:

по России и зарубежью

«ЛАНЬ-ТРЕЙД»
РФ, 196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, 1
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82
тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru
ICQ: 446-869-967

www.lanbook.com
пункт меню **«Где купить»**
раздел **«Прайс-листы, каталоги»**

в Москве и в Московской области

«ЛАНЬ-ПРЕСС»
109387, Москва, ул. Летняя, д. 6
тел.: (499) 178-65-85, 722-72-30
e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае

«ЛАНЬ-ЮГ»
350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35
e-mail:lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазин

Издательство «Лань»: http://www.lanbook.com

магазин электронных книг

Global F5

http://globalf5.com/